MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

PERIODICALS
UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

NEUE FOLGE

DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

J. RADON

WIEN

SCHRIFTLEITUNG

N. HOFREITER

WIEN

55. BAND, 2. HEFT

MIT 1 TEXTABBILDUNG

(AUSGEGEBEN IM MAI 1951)

WIEN

SPRINGER-VERLAG

1951

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

55. Band/2. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Hlawka, E. Integrale auf konvexen Körpern III 105

Gröbner, W. Ein Irreduzibilitätskriterium für Primärideale in kommutativen Ringen 138

Hohenberg, F. Eine reelle Darstellung der Hyperkegelschnitte 146

Köthe, G. Die verschiedenen Reziproken einer unendlichen Matrix 153

Aigner, A. Der multiplikative Aufbau der Polynome in der unendlichen Ordnungszahl ω 157

Dénes, P. Über Einheiten von algebraischen Zahlkörpern 161

Wunderlich, W. Über ein spezielles Dreiecksnetz aus Kegelschnitten 164

Buchbesprechungen 170

Integrale auf konvexen Körpern III.*

Von

Edmund Hlawka, Wien.

(Eingelangt am 11. August 1950.)

Es sei $f(x)$ die Distanzfunktion, $H(u)$ die Stützfunktion des konvexen Körpers $K: f(x) \leqq 1$ im R_m. Wir setzen voraus, daß diese Funktionen für $x \neq o$, bzw. $u \neq o$ analytisch sind, die Fläche $S: f(x) = 1$ nur Tangentialebenen besitzt, welche S von erster Ordnung berühren und $f(x) = f(-x)$ ist. Dann wird gezeigt, daß $\mathfrak{J} = \frac{1}{(2\pi)^m} \lim_{T \to \infty} \int_{H(x) \leqq T} e^{iax}\, dx \int_{f(y) \leqq 1} e^{ixy}\, dy$ existiert, für $a \neq o$. Es ist $\mathfrak{J} = 1$, für $f(a) < 1$, $\frac{1}{2}$ für $f(a) = 1$ und o für $f(a) > 1$. Es ist weiter $\frac{1}{(2\pi)^m} \lim_{T \to \infty} \int_{H \leqq T} e^{iax}\, dx \int_{f \leqq 1} (1 - f^2(y))^\delta e^{ixy}\, dy \; (a \neq o, \delta > o)$ vorhanden und gleich $(1 - f^2(a))^\delta$ für $f(a) \leqq 1$ und o für $f(a) > 1$. Es wird gleich folgender allgemeinerer Satz bewiesen (§ 2, Satz 1): Ist $\Phi(t)$ auf $[o, \infty]$ eine solche Funktion, für die:

1. $\Phi(t) t^{\frac{m-1}{2}}$ auf $[o, \infty]$ im Riemannschen Sinne absolut integrierbar ist, 2. es eine Zahl $k > o$ gibt, so daß $\int_0^\tau |\Phi(t)|\, t^{\frac{m-1}{2}}\, dt = o(\tau^k)$ ist, für $\tau \longrightarrow o$, 3. es einen Punkt $a \neq o$ im R_m gibt, so daß $\Phi(t)$ in einer Umgebung von $f(a)$ von beschränkter Variation ist, so existiert das im Riemannschen Sinne absolut konvergente Integral $\int_{f \leqq T} \Phi(f(y))\, e^{ixy}\, dy$ für jedes T, der Limes $\mathfrak{J}(x) = \lim_{T \to \infty} \int_{f \leqq T} \Phi(f)\, e^{ixy}\, dy$ und $\lim_{T \to \infty} \int_{H \leqq T} e^{iax}\, \mathfrak{J}(x)\, dx$ und es ist

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \lim_{T \to \infty} \int_{H(x) \leqq T} e^{iax}\, \mathfrak{J}(x)\, dx = \tfrac{1}{2}(\Phi(f(a) + 0) + \Phi(f(a) - 0)).$$

Wenn man von der Voraussetzung 2. absieht, die wahrscheinlich überflüssig ist, ist dies eine Verallgemeinerung des Hankelschen Satzes.

* Herrn Professor *G. Herglotz* zum 70. Geburtstag.

Die Annahme, daß $f(x)$ und $H(u)$, für $x \neq 0$, $u \neq 0$ analytisch sind, wurde nur der Einfachheit wegen gemacht, und läßt sich abschwächen. In dieser Arbeit machen wir nur eine einfache Anwendung des diskontinuierlichen Integrals $\mathfrak{J}$ auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Weitere Anwendungen sollen in einer folgenden Arbeit gegeben werden*. Im § 4 und § 5 beschäftigen wir uns mit folgenden Problem: Es sei $P(E)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung im R_m, $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit der Verteilung $P(E)$. Es seien die Mittelwerte und die gemischten Momente zweiter Ordnung der Koordinaten der X Null, ihre Streuung 1 und die vierten Momente endlich. Es sei weiter ${}^{(n)}X = \frac{1}{\sqrt{n}}(X^{(1)} + \ldots + X^{(n)})$ und $\mu_n(a)$ die Wahrscheinlichkeit, daß $f({}^{(n)}X) \leqq a$. Was kann dann über die Differenz $\mu_n(a) - \psi(a)$, wo $\psi(a) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{f \leqq a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ ausgesagt werden? Es ist (Satz 5): $|\mu_n(a) - \psi(a)| = 0\left(\frac{1}{n^{\frac{m}{m+1}}}\right)$. Dies wurde für die Kugel von C. G. Esseen in der großen Arbeit, Fourier Analysis of distribution fonctions, Acta Mathematica 77 (1945), S. 1—125 gezeigt. Der Beweis von Satz 5 wird nur skizziert, da der Esseensche Beweis nur in einigen Punkten geändert werden muß. In § 4 wird der besondere Fall betrachtet, daß eine „Lattice distribution" vorliegt, wo die Masse von $P(E)$ in den Punkten $x_0 + A\,g$ konzentriert ist, wo A eine nichtsinguläre Matrix ist und g alle Gitterpunkte des R_m durchläuft. Wir setzen noch voraus, daß auch die dritten Momente der Koordinaten von $X^{(i)}$ verschwinden. Hier kann Satz 5 mit den Methoden, welche bei der Abschätzung des „Gitterrestes" verwendet werden, bewiesen werden. (§ 4, Satz 3). Man kann aber etwas mehr zeigen: (§ 4, Satz 4) Ist die Dimension des Raumes R_m, $\geqq 5$, so gilt für fast alle x_0

$$|\mu_n(a) - \psi(a)| = 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Wir verwenden dabei, wie schon in I, die Methode von *Kendall*. In der Arbeit verwenden wir stets, wenn nichts anderes bemerkt wird, den Integralbegriff von *Lebesgue*.

---

* In dieser Arbeit wird auch eine Verallgemeinerung des Neumannschen Satzes hergeleitet werden.

Die Arbeiten, Integrale auf konvexen Körpern I, II, Monatshefte für Mathem. 54, S. 1—36, S. 81—99 (1950) werden im folgenden kurz mit I, II zitiert.

§ 1.

Der erste Hilfssatz stellt eine Verallgemeinerung von I, § 1, Satz 1 dar.

Hilfssatz 1: Es sei $U(x)$ auf $a \leqq f(x) \leqq b$ im *Riemann*schen Sinne integrierbar, $u(t) = \int\limits_{a \leqq f \leqq t} U(x)\, dx$ differenzierbar auf $[a, b]$, $u'(t)$ und $F(t)$ auf $[a, b]$ ebenfalls im *Riemann*schen Sinne integrierbar, dann ist $F(f(x))$ auf $a \leqq f(x) \leqq b$ im *Riemann*schen Sinne integrierbar und es ist

$$\int\limits_{a \leqq f \leqq b} F(f(x))\, U(x)\, dx = \int\limits_a^b F(t)\, u'(t)\, dt \tag{1}$$

Ist darüber hinaus $F(t)$ differenzierbar und $F'(t)$ im *Riemann*schen Sinne integrierbar, dann ist

$$\int\limits_{a \leqq f \leqq b} F(f)\, U(x)\, dx = F(b)\, u(b) - \int\limits_a^b F'(t)\, u(t)\, dt \tag{2}$$

Beweis: Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Polynome $P_1(t)$, $P_2(t)$, so daß $P_1(t) \leqq F(t) \leqq P_2(t)$ und $\int\limits_a^b (P_2(t) - P_1(t))\, dt < \varepsilon$. Nun sind die Funktionen $P_i(f(x))$ stetig auf $a \leqq f(x) \leqq b$, im *Riemann*schen Sinne integrierbar und es ist nach I, § 1, Satz 1

$$\int\limits_{a \leqq f \leqq b} P_i(f(x))\, dx = m\, \mathfrak{J} \int\limits_a^b P_i(t)\, t^{m-1}\, dt, \quad \text{wo } \mathfrak{J} = \int\limits_{f \leqq 1} dx$$

Also ist, wenn wir kurz $m\, \mathfrak{J} \int\limits_a^b F(t)\, t^{m-1}\, dt = A$ setzen

$$A - \varepsilon C \leqq \int\limits_{a \leqq f \leqq b} P_1(f)\, dx \leqq \int\limits_{a \leqq f \leqq b} F(f)\, dx \leqq \overline{\int\limits_{a \leqq f \leqq b}} F(f)\, dx \leqq \int\limits_{a \leqq f \leqq b} P_2(f)\, dx \leqq A + \varepsilon C$$

wo C nur von a und b abhängt. Daraus folgt, daß $\int\limits_{a \leqq f \leqq b} F(f)\, dx$ existiert und gleich A ist. Damit ist (1) für $U(x) = 1$ bewiesen.

Es sei nun wieder $P(t)$ ein Polynom mit $\int\limits_a^b |F(t) - P(t)|\, dt < \varepsilon$. Dann gilt (1) zunächst für $P(t)$, denn es ist

$$\int\limits_{a\leqq f\leqq b} P(f(x))\,U(x)\,dx = P(b)\,u(b) - \int\limits_{a\leqq f\leqq b} U(x)\,(P(b) - P(f(x))\,dx$$

Das Integral rechts ist aber $\int\limits_{a\leqq f\leqq b} U(x)\,dx \int\limits_{f}^{b} P'(t)\,dt = \int\limits_{a}^{b} P'(t)\,u(t)\,dt.$

Damit ist (2) für P gezeigt. Partielle Integration liefert (1) für $P(t)$. Nun ist mit $F(t)$ und $P(t)$ auch $F(t) - P(t)$ integrierbar und damit auch $F(f(x)) - P(f(x))$ und auf diese Funktionen können wir (1) mit $U(x) = 1$ anwenden, wie bereits gezeigt. Also ist

$$\left| \int\limits_{a\leqq f\leqq b} (F(f) - P(f))\,U(x)\,dx \right| \leqq C \int\limits_{a}^{b} |F(f) - P(f)|\,dx \leqq C_1\,\varepsilon,$$

dabei ist C obere Schranke für U und C_1 hängt von C, a und b ab.

Also ist

$$\left| \int\limits_{a\leqq f\leqq b} F(f)\,U(x)\,dx - \int\limits_{a}^{b} F(t)\,u'(t)\,dt \right| \leqq \left| \int\limits_{a\leqq f\leqq b} (F(f) - P(f))\,U\,dx \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{a}^{b} (F(t) - P(t))\,u'(t)\,dt \right| \leqq C_3\,\varepsilon,$$

da $u'(t)$ beschränkt ist. Damit ist (1) allgemein gezeigt. Formel (2) folgt dann sofort.

Hilfssatz 2: Es sei $F(x)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, $b \neq 0$, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ die äußere Normale der Fläche $f(x) = 1$, dann gilt für jede natürliche Zahl s und für $|b| > c$ (do Oberflächenelement)

$$\int\limits_{f(x)=1} F(x)\,e^{ibx}\,u_i\,do = \frac{1}{|b|^{\frac{m-1}{2}}} \left(\sum_{k=0}^{s} (A_k\,e^{iH(b)} + B_k\,e^{-iH(b)})\,|b|^{-\frac{k}{2}} + \right.$$

$$\left. + 0\left(|b|^{-\frac{s+1}{2}}\right) \right) \qquad (3)$$

wo $A_k = e^{-\frac{i\pi}{4}(m-1+k)}\,\alpha_k(e_b)$, $B_k = e^{\frac{i\pi}{4}(m-1+k)}\,\beta_k(e_b)$ $\left(e_b = \frac{b}{|b|}\right)$.

Dabei sind $\alpha_k(v)$ und $\beta_k(v)$ differenzierbare Funktionen in v.

Beweis: Es sei S eine orthogonale Matrix, so daß $Sb = |b|\,e$ ($e = (1, 0, \ldots, 0)$), welche nur von e_b abhängt. Durch die Transformation $x = S^{-1}y$ geht $f(x) = 1$ in die Fläche $s(B): f'(y) = 1$, $F(x)$ in $F'(y)$ und bx in $|b|\,y$ über, also wird (3) eine Summe von Integralen $\int\limits_{s} F'(y)\,e^{i\omega y_1}\,v_i\,do$ ($\omega = |b|$, v_i die Komponenten der äußeren Normalen von s), mit Koeffizienten, die nur von e_b abhängen. Nun können

wir die Entwicklungen von I, § 3 anwenden, setzen wieder $v_1 = \cos\vartheta$ $v_j = a_j \sin\vartheta$ $(j \geqq 2)$, dann wird aus diesen Integralen

$$\int_{E_{m-1}} d\bar{\sigma} \int_0^{\pi} e^{i\omega y_1} F'(y) K' \sin^{m-2}\vartheta \, v_j \, d\vartheta \tag{4}$$

Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie dort. Es ist $\dfrac{\partial y_1}{\partial \vartheta} = 0$ wieder nur in $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$. Setzen wir $g(\vartheta) = \psi'(v) \sin^{m-2}\vartheta \, v_j$ wo $\psi'(v) = K'(v) F'(y)$ also $= \psi(S^{-1}u)$ wo $\psi(u) = K(u) F(x)$. Wir benötigen die Ableitungen von $g(\vartheta)$ in 0 und π. Es ist

$$\psi'(v) = \sum_{l_1+\ldots+l_m \leqq t} A_{l_1 \ldots l_m} \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_m} \psi'(e)}{\partial v_1^{l_1} \ldots \partial v_m^{l_m}} (v_1 - 1)^{l_1} v_2^{l_2} \ldots v_m^{l_m} + \ldots \tag{5}$$

wo t eine beliebige natürliche Zahl ist. Nun sind die v_i analytische Funktionen in ϑ (bei festem a_j); entwickeln wir sie also nach Potenzen von ϑ und ordnen wir in (5) nach Potenzen von ϑ, so erhalten wir

$$\psi'(v) = \sum_{j=0}^{t} \vartheta^j B_j(a) + \ldots$$

wo die B_j Polynome in $a_2, \ldots, a_m$ sind, mit Koeffizienten, welche die obigen Ableitungen von $\psi'(e)$ nach $v_1, \ldots, v_m$ enthalten. Nun ist $\psi'(v) = \psi(S^{-1}u)$, also drücken sich diese Ableitungen in den Ableitungen von $\psi(u)$ nach $u_1, \ldots, u_m$ an der Stelle e_b linear aus, mit Koeffizienten, welche nur von S abhängen.

Also sind die $B_j(a)$ Polynome in den a mit Koeffizienten, welche nur von e_b abhängen und in e_b beliebig oft differenzierbar sind. Wir wollen deutlicher $B_j(a) = B_j(a; e_b)$ schreiben. Daraus folgt weiter, daß wir für g haben:

$$g(\vartheta, a) = \vartheta^{m-2} [C_1(a; e_b) + C_2(a; e_b)\vartheta + \ldots]$$

Eine analoge Entwicklung gilt an der Stelle $\vartheta = \pi$. Daraus folgt zunächst, daß die Ableitungen von g nach ϑ von einer Ordnung $< m - 2$ Null sind für $\vartheta = 0$, bzw. $\vartheta = \pi$ und daß sie sonst an diesen Stellen Polynome in $a_2, \ldots, a_m$ sind mit Koeffizienten, welche von e_b abhängen. Dasselbe gilt auch von y_1 und von den l_{ts} (vgl. deren Definition aus I, Seite 4).

Weiters ist zu sehen, daß

$$\int_{E_{m-1}} F_0^{-j} P(a) \, d\bar{\sigma}$$

wo $P(a)$ ein Polynom in $a_2, \ldots, a_m$ und $F_0 = \sum_{i,j=2}^{m} H'_{ik}(e)\, a_i\, a_k$ ist (H' Stützfunktion von $s(B)$), nur von den $H'_{ik}(e)$, also wieder nur von e_b abhängt. Wenden wir also den Hilfssatz aus I, § 2 an und gehen wir so vor wie in I, § 3, so erhalten wir die Behauptung.

Hilfssatz 3: Es mögen wieder dieselben Voraussetzungen wie vorher gelten, dann ist

$$\int_{f(x)\leqq 1} e^{ibx} F(x)\, dx = \frac{1}{|b|^{\frac{m+1}{2}}} \left(\sum_{k=0}^{s} (C_k\, e^{i H(b)} + D_k\, e^{-i H(b)})\, |b|^{-\frac{k}{2}} + \right.$$

$$\left. + 0\left(|b|^{-\frac{s+1}{2}}\right)\right) \tag{6}$$

wo C_k und D_k wieder nur von $e_b = \frac{b}{|b|}$ abhängen, und zwar in e_b beliebig oft differenzierbar. Insbesondere ist

$$C_0 = e^{-\frac{i\pi}{4}(m+1)}\, C_0'(e_b),\ D_0 = e^{\frac{i\pi}{4}(m+1)}\, D_0'(e_b)$$

und C_0', D_0' reell.

Beweis: Ist Δ der *Laplace*sche Differenzialausdruck, so ist $\Delta e^{ibx} = -|b|^2 e^{ibx}$. Nun ist nach dem *Gauß*schen Integralsatz

$$\int_{f\leqq 1} F(x)\, \Delta(e^{ibx})\, dx = i \int_{f=1} F(x)\,(b\,u)\, e^{ibx}\, do + \int_{f\leqq 1} \operatorname{grad} F \operatorname{grad}(e^{ibx})\, dx$$

Dabei ist wieder u die äußere Normale von $f(x) = 1$ und wir haben benützt, daß $\frac{\partial}{\partial u}(e^{ibx}) = \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}(e^{ibx}) = i\,(b\,u)\, e^{ibx}$ ist, daher wird das Integral links in (6)

$$\int_{f\leqq 1} F(x)\, e^{ibx}\, dx = -\frac{i}{|b|} \int_{f=1} (e_b\, u)\, F(x)\, e^{ibx}\, do + \frac{i}{|b|} \sum_{j=1}^{m} \int_{f\leqq 1} \frac{\partial F}{\partial x_j} e_b^{(j)} e^{ibx} dx$$

wo $e_b^{(j)}$ die j-te Komponente von e_b ist.

Auf jedes Integral $\int \frac{\partial F}{\partial x_j} e^{ibx}\, dx$ können wir wieder dieselbe Methode anwenden und erhalten nach dem t-ten Schritt $\left(t = [\frac{m+s}{2}] + 2\right)$

$$\Im = \int_{f\leqq 1} F(x)\, e^{ibx}\, dx = \sum_{k=1}^{t} |b|^{-k} \int_{f=1} P_1(x; e_b)\,(u\, e_b)\, e^{ibx}\, do + |b|^{-t}$$

$$\int_{f\leqq 1} P_2(x; e_b)\, e^{ibx}\, dx$$

wo P_1, P_2 Polynome in e_b sind, mit Koeffizienten, die nur von den Ab-

leitungen von F abhängen. Da die Ableitungen beschränkt sind, folgt sofort, daß das letzte Integral $0\ (|\,b\,|^{-\frac{1}{2}(m+s+2)})$ ist.

Auf jedes Integral der obigen Summe können wir Hilfssatz 2 anwenden. Fassen wir alles zusammen, so erhalten wir gerade die Behauptung.

Hilfssatz 4: Liegt eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\Phi(v)$ vor, in $v \neq 0$, so ist für $x \neq 0$, $F(x) = \Phi\left(\frac{x}{|x|}\right)$ beliebig oft differenzierbar und es ist für jede natürliche Zahl l

$$\frac{\partial^l F(x)}{\partial x_i^l} = |x|^{-l} \left.\frac{\partial^l \Phi(v)}{\partial v_i^l}\right|_{v=e_x} \quad \left(e_x = \frac{x}{|x|}\right) \tag{7}$$

Beweis: Für $l = 0$ ist die Behauptung richtig. Wir verwenden jetzt vollständige Induktion nach l. Es genügt den Fall $i = 1$ zu betrachten. Da $\Phi(v)$ in $v = e_x$ homogen vom 0-ten Grade ist, so ist ihre l-te Ableitung nach v_1 homogen vom Grade $-l$, also nach *Euler*

$$R = \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\partial^l \Phi}{\partial v_1^l}\right) + l \frac{\partial^l \Phi}{\partial v_1^l} = 0.$$

Weiters ist $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{1}{|x|} - \frac{x_1^2}{|x|^3}$, $\frac{\partial v_i}{\partial x_1} = -\frac{x_i x_1}{|x|^3}$ für $i \neq 1$.

Wir nehmen nun an, für l sei die Behauptung bereits bewiesen. Dann ist

$$\frac{\partial^{l+1} F}{\partial x_1^{l+1}} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(|x|^{-l} \frac{\partial^l \Phi}{\partial v_1^l}\right) = |x|^{-(l+1)} \frac{\partial^{l+1} \Phi}{\partial v_1^{l+1}} - x_1 |x|^{-(l+2)} R =$$

$$= |x|^{-(l+1)} \frac{\partial^{l+1} \Phi}{\partial v_1^{l+1}}$$

Hilfssatz 5: Ist $F(x)$ wie im vorhergehenden Hilfssatz definiert, so gilt, wenn $T_1 > C$ und H die Stützfunktion von $f = 1$ ist

$$\int_{T_1 \leq H(x) \leq T_2} e^{ibx} F(x)\, dx = U(T_2) - U(T_1) \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wo } U(T) = \frac{T^{\frac{1}{2}(m-1)}}{|b|^{\frac{1}{2}(m+1)}} \Big(M_1(T,b) + \big(|b|\,T\big)^{-\frac{1}{2}} M_2(T,b) + \\ + 0\left(\frac{1}{|b|\,T}\right) + 0\left(\frac{1}{|b|^m T}\right)\Big) \\ \text{und } M_i(T,b) = A_i(e_b) \cos\left(T H(b) - \varphi_i\right),\ \varphi_1 = \frac{\pi}{4}(m+1)\ (i=1,2) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ist.

Beweis: Wir könnten so, wie bei Hilfssatz 3 vorgehen. Um aber die Übersicht zu erleichtern, nehmen wir zuerst eine Drehung vor, so daß $S\,b = e \mid b \mid$ ist. Schreiben wir nach Ausübung der Substitution $x \longrightarrow S^{-1}x$ wieder für $H(S^{-1}x)$, $F(S^{-1}x)$ der Kürze halber $H(x)$, $F(x)$, dann haben wir

$\int e^{i\omega x_1} F(x)\,dx$ zu betrachten, wo $\omega = \mid b \mid$. Dann ist wieder nach $T_1 \leqq H \leqq T_2$
dem *Gauß*schen Integralsatz

$$\int\limits_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{i\omega x_1} F\,dx = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(i\omega)^{k+1}} \int\limits_{H=T_1}^{H=T_2} e^{i\omega x_1} \frac{\partial^k F}{\partial x_1^{\,k}}\, u_1\,do + \\ + \frac{(-1)^m}{(i\omega)^{m+1}} \int\limits_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{i\omega x_1} \frac{\partial^{m+1} F}{\partial x_1^{\,m+1}}\,dx \tag{10}$$

denn es ist ja z. B.

$$\int\limits_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{i\omega x_1} F\,dx = \frac{1}{i\omega} \left(\int\limits_{H=T_1}^{H=T_2} e^{i\omega x_1} F\, u_1\,do - \int\limits_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{i\omega x_1} \frac{\partial F}{\partial x_1}\,dx \right)$$

Wir schätzen nun das letzte Integral ab. Nach dem vorigen Hilfssatz ist es dem Betrage nach

$$\leqq \omega^{-(m+1)} \int\limits_{T_1 \leqq H \leqq T_2} \mid x \mid^{-(m+1)} \left| \frac{\partial^{m+1} \Phi}{\partial v_1^{\,m+1}} \right| dx \leqq C\,\omega^{-(m+1)} \int\limits_{\beta^{-1}T_1 \leqq \mid x \mid \leqq \alpha^{-1}T_2} \mid x \mid^{-(m+1)} dx = \\ = 0\,(T_1^{-1}\,\omega^{-(m+1)}) + 0\,(T_2^{-1}\,\omega^{-(m+1)})$$

denn es ist ja $\alpha \mid x \mid \leqq H(x) \leqq \beta \mid x \mid$.

Nun nehmen wir aus (10) das Integral für $k = 0$ und wenden auf $\int\limits_{H=T} e^{i\omega x_1} F\, u_1\,do = T^{m-1} \int\limits_{H=1} e^{i\omega x_1} F\, u_1\,do$, mit $s = 1$, den Hilfssatz 2 an. Wir erhalten so

$$-i \int e^{i\omega x_1} F\, u_1\,do = (T\omega^{-1})^{1/2(m-1)} (M_1(T; \omega e) + \\ + \frac{1}{(\omega T)^{1/2}} M_2(T; \omega e) + 0\,((\omega T)^{-1}).$$

Bei den anderen Integralen gehen wir analog vor, nehmen aber in Hilfssatz 2, nur $s = 0$. Dabei haben wir noch zu berücksichtigen, daß

$$\int\limits_{H=T} e^{i\omega x_1} \frac{\partial^k F}{\partial x_1^{\,k}}\, u_1\,do = T^{m-1-k} \int\limits_{H=1} e^{i\omega x_1} \mid x \mid^{-k} \frac{\partial^k \Phi}{\partial v_1^{\,k}}\, u_1\,do.$$

Daher hat dieses Integral nach Hilfssatz 2 die Größenordnung $0\,((T\omega^{-1})^{1/2(m-1)}\,T^{-k})$. Wir erhalten, wenn wir alles zusammenfassen,

gerade die Behauptung des Hilfssatzes für $b = \omega e$. Drehen wir wieder zurück, so erhalten wir die allgemeine Behauptung.

Hilfssatz 6: Es seien α, β, λ reelle Zahlen $j = 0, 1, 2, 3$, dann ist

$$\int_{T_1}^{T_2} u^{-\frac{j}{2}} \sin(\lambda u+\beta)\, du = \begin{cases} 0\,(T_1^{-\frac{j}{2}}) + 0\,(T_2^{-\frac{j}{2}}) \text{ für } \lambda \neq 0 \\ 0\,(T_1^{-\frac{1}{2}}) + 0\,(T_2^{-\frac{1}{2}}) \text{ für } j = 3 \text{ und alle } \lambda \\ \text{beschränkt für } j = 2,\ \beta = 0 \text{ für alle } \lambda \end{cases} \quad (11)$$

und 0 für $\lambda = 0$.

Der Beweis ist klar. Die dritte Behauptung folgt bekanntlich daraus, daß $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du$ konvergent ist.

Hilfssatz 7: Es sei $M(u) = \cos(t u - \alpha)$ $(t > 0)$, dann gilt, wenn $F(x)$ wie im Hilfssatz 5 definiert ist und $(T_1 > C > 0)$

$\Im_s = \int_{T_1 \leqq H \leqq T_2} M(H(x))\, H(x)^{-s} F(x)\, e^{ibx}\, dx$ ist, $\Im_s = 0\ (T_1^{-\frac{1}{2}})$, wenn $s \geqq \frac{m}{2} + 1$ für alle t.

Dies gilt auch noch für $s = \frac{1}{2}(m+1)$, $\alpha = \frac{\pi}{4}(m+1)$, aber nicht gleichmäßig in t. Dagegen gilt gleichmäßig für alle t, $\Im_s = 0\,(1)$, mit $|b| \geqq C_1 > 0$.

Für $\frac{1}{2}(m-1) \leqq s \leqq \frac{m}{2}$ und $t \neq f(b)$ gilt $\Im_s = 0\,(1)$. Dabei hängen die 0-Terme von b ab.

Beweis: Nehmen wir zuerst den Fall, $s \geqq \frac{m}{2} + 1$, dann ist, wenn wir $N(u) = M(u)\, u^{-s}$ setzen, nach Hilfssatz 1

$$\Im_s = N(T_2) \int_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{ibx} F(x)\, dx - \int_{T_1}^{T_2} N'(u)\, du \int_{T_1 \leqq H \leqq u} e^{ibx} F(x)\, dx = \Im_s' - \Im_s''$$

Es ist zunächst $N(u)$ und $N'(u)$ ein $0\,(u^{-s})$
und wenn wir Hilfssatz 5 (8) verwenden

$$\Im_s' = 0\,(T_2^{\frac{m-1}{2} - s}) = 0\,(T_1^{-\frac{1}{2}}).$$

Ebenso erhalten wir für

$$\mathfrak{J}_s'' = 0\left(\int_{T_1}^{T_2} u^{-s}\, u^{\frac{1}{2}(m-1)}\, d\,u\right) = 0\,(T_1^{-\frac{1}{2}}).$$

Jetzt betrachten wir den Fall $\frac{1}{2}(m-1) \leqq s \leqq \frac{m}{2}$. Zunächst ist wieder

$$\mathfrak{J}_s' = 0\,(T_1^{\frac{1}{2}(m-1)-s}).$$

Weiter ist

$$\mathfrak{J}_s'' = \int_{T_1}^{T_2} M'(u)\, R(u)\, u^{-s}\, d\,u - \int_{T_1}^{T_2} M(u)\, R(u)\, u^{-s-1}\, d\,u = \mathfrak{J}_s^{\mathrm{III}} - \mathfrak{J}_s^{(\mathrm{IV})}$$

Dabei haben wir $R = \int_{T_1 \leqq H \leqq u} e^{ibx} F(x)\, d\,x$ gesetzt. Es ist also zunächst das Integral $\mathfrak{J}_s^{\mathrm{III}} = t \int_{T_1}^{T_2} \frac{\sin(t\,u-\alpha)}{u^s} R(u)\, d\,u$ zu betrachten. Nun verwenden wir wieder Hilfssatz 5 und erhalten

$$t^{-1}\mathfrak{J}_s^{\mathrm{III}} = \int_{T_1}^{T_2} \sin(t\,u-\alpha)\, U(u)\, u^{-s}\, d\,u - U(T_1) \int_{T_1}^{T_2} \sin(t\,u-\alpha)\, u^{-s}\, du$$

Das zweite Integral ist $0\,(T_1^{\frac{1}{2}(m-1)})\, 0\,(T_1^{-s}) = 0\,(T_1^{-\frac{1}{2}})$.

Wir setzen nun im ersten Integral für U ein. Zunächst betrachten wir den 0-Term in $U(u)$; dies liefert für das Integral

$$0\left(\int_{T_1}^{T_2} u^{\frac{1}{2}(m-1)-1}\, u^{-s}\, d\,u\right) = 0\,(T_1^{-\frac{1}{2}}).$$

Jetzt nehmen wir das Hauptglied

$$u^{\frac{1}{2}(m-1)}\, |b|^{-\frac{1}{2}(m+1)}\, (M_1(u;b) + (|b|u)^{-\frac{1}{2}} M_2(u;b)).$$

Dies liefert für $\mathfrak{J}_s^{\mathrm{III}}$ zwei Integrale von der Gestalt

$$\int_{T_1}^{T_2} u^{\frac{1}{2}(m-l)-s} \sin(t\,u-\alpha)\cos(u\,f(b)-\varphi_l)\, d\,u =$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} u^{\frac{1}{2}(m-l)-s} (\sin(u(t-f(b))-\alpha+\varphi_l)+\sin(u(t+f(b))-\alpha-\varphi_l))\, du$$

$(l = 1, 2)$.

Setzen wir $l + 2s - m = j$, so haben wir $0 \leqq j \leqq 3$ und für $l = 1$, $s = \frac{1}{2}(m+1)$ haben wir $j = 2$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}(m+1)$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}(m+1)$, also $\beta = \varphi_1 - \alpha = 0$.

Wir können nun den Hilfssatz 6 anwenden und erhalten die Behauptung für $\mathfrak{J}_s^{\mathrm{III}}$. Ist $s > \frac{1}{2}(m-1)$, so ist $\mathfrak{J}_s^{(\mathrm{IV})} = 0\,(T_1^{-\frac{1}{2}})$ für alle t. Ist aber $s = \frac{1}{2}(m-1)$, so wird $\mathfrak{J}_s^{(\mathrm{IV})}$ wie $\mathfrak{J}_s'''$ behandelt. Damit ist dann alles gezeigt.

Hilfssatz 8: Ist $G(x) = \int\limits_{f(y)\leqq 1} e^{ixy}\,dy$, $G_1(x) = \int\limits_{f(y)\leqq 1} e^{ixy}\,(m + i\,x\,y)\,dy$ so ist $(t > 0,\ a \neq 0,\ T_1 \geqq C > 0)$

$$A = \int\limits_{T_1\leqq H\leqq T_2} e^{iax}\,G(t\,x)\,dx = \begin{cases} 0\,(t^{-\frac{1}{2}(m+1)}\,T_1^{-\frac{1}{2}}) + 0\,(t^{-\frac{1}{2}(3m+2)}\,T_1^{-\frac{m}{2}-1}), \\ 0\,(t^{-\frac{1}{2}(m+1)}) + 0\,(t^{-\frac{1}{2}(3m+2)}\,T_1^{-\frac{m}{2}-1}) \\ \text{gleichmäßig in } t - f(a) \end{cases} \tag{12}$$

$$B = \int\limits_{T_1\leqq H\leqq T_2} e^{iax}\,G_1(t\,x)\,dx = 0\,(t^{-\frac{1}{2}(m-1)}) + 0\,(t^{-\frac{3}{2}m}\,T_1^{-m}), \text{ wenn } t \neq f(a) \tag{13}$$

Dabei hängen die 0-Terme von a ab.

Beweis: Es besitzt nach I, § 3 $G(t\,x)$, bzw. $G_1(t\,x)$ die Entwicklung

$$G(t\,x) = \sum_{k=0}^{2m} \cos\,(t\,H(x) - \alpha_k)\,\Phi_k(e_x)\,(t\,|\,x\,|)^{-\frac{1}{2}(m+k+1)} + \\ + 0\,((t\,|\,x\,|)^{-\frac{1}{2}(3m+2)}),\ (e_x = \frac{x}{|\,x\,|})$$

$$\text{bzw. } G_1(t\,x) = \sum_{k=0}^{2m} \cos\,(t\,H(x) - \alpha_k')\,\Phi_k^*(e_x)\,(t\,|\,x\,|)^{-\frac{1}{2}(m+k-1)} + \\ + 0\,((t\,|\,x\,|)^{-\frac{3}{2}m}).$$

Dabei ist $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}(m+1)$. Nun ist $H(x) = |\,x\,|\,H(e\,x)$, also haben die Glieder der Summe, abgesehen von den Potenzen von t, gerade die Gestalt $M(H)\,H^{-s}\,F(x)$, wo $F(x) = \Phi(e_x)$.

Wir können also den vorhergehenden Hilfssatz 7, mit $b = a$, anwenden. Weiter ist $\int\limits_{T_1\leqq H\leqq T_2} |\,x\,|^{-m-l}\,dx = 0\,(T_1^{-l})$, wenn l eine natürliche Zahl ist. Setzen wir alles ein, so erhalten wir die Behauptung.

Hilfssatz 9: Ist $a \neq 0$, $\delta > 0$ beliebig, aber so klein, daß $\delta < f(a)$ t, T positive Zahlen mit $T > 1$, $t\,T \geqq c > 1$, so gilt für jede natürliche Zahl s, wenn $t \leqq f(a) - \delta$

$$\mathfrak{J}_1 = \int\limits_{H \leqq T} e^{iax}\, G(t\,x)\, d\,x = 0\,(T^{\frac{1}{2}(m-1)}\,(T\,t)^{-\frac{1}{2}(m+1)}) + \\ + 0\,(T^{m-1}\,(T\,t)^{-\frac{1}{2}(m+s+1)}) \tag{14}$$

und $$\mathfrak{J}_2 = \int\limits_{H \leqq T} e^{iax}\, G_1(t\,x)\, d\,x = 0\,(T^{\frac{1}{2}(m-1)}\,(T\,t)^{-\frac{1}{2}(m-1)}) + \\ + 0\,(T^{m-1}\,(T\,t)^{-\frac{1}{2}(m+s+1)}). \tag{15}$$

Dabei hängt 0 von a und δ ab.

Beweis: Es ist $f(a+t\,y) \geqq f(a) - t\,f(y) \geqq f(a) - t \geqq \delta$, also $|a+t\,y| \geqq c\,\delta > 0$. Setzen wir $b = a + t\,y$ und benützen wir, daß $\Delta(e^{ibx}) = -|b|^2 e^{ibx}$, $\Delta((i\,x\,y - b\,y\,|\,b\,|^{-2})\,e^{ibx}) = -i\,|\,b\,|^2\,x\,y\,e^{ibx}$ so erhalten wir für die Integrale unter Benützung des *Gauß*schen Integralsatzes

$$\int\limits_{f \leqq 1} d\,y \int\limits_{H \leqq T} e^{ibx}\, d\,x = -i \int\limits_{f(y) \leqq 1} d\,y \int\limits_{H=T} bu\,|\,b\,|^{-2}\, e^{ibx}\, d\,o \tag{16}$$

bzw.

$$\int\limits_{f \leqq 1} d\,y \int\limits_{H \leqq T} e^{ibx}\,(m + i\,t\,x\,y)\, d\,x = m\,\mathfrak{J}_1 + t\,\mathfrak{J}_3$$

wo

$$\mathfrak{J}_3 = i \int\limits_{f \leqq 1} d\,y \int\limits_{H \leqq T} e^{ibx}\, x\,y\, d\,x = -\int\limits_{T \leqq 1} d\,y \int\limits_{H=T} ((i\,x\,y - b\,y\,|\,b\,|^{-2})\,b\,u + \\ + y\,u)\,|\,b\,|^{-2}\, e^{ibx}\, d\,o \tag{17}$$

wo u der Einheitsvektor der nach außen gerichteten Normalen von $H = T$ ist und $d\,o$ das Oberflächenelement dieser Fläche ist, $= T^{m-1}\, d\,\bar{o}$, wo $d\,\bar{o}$ das entsprechende Element von $H = 1$ ist. Also sind $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ eine Summe von Integralen der Gestalt

$$T^{m-1} \int\limits_{H=1} e^{i\,T\,a\,x}\, u_i\, d\,\bar{o} \int\limits_{f(y) \leqq 1} F_i(y)\, e^{i\,t\,T\,x\,y}\, d\,y,$$

bzw. solchen, die mit T^m multipliziert sind.

Die Funktionen $F_i(y)$ besitzen alle Ableitungen, welche bei festem δ und a beschränkt sind. Wir können also Hilfssatz 3 mit $b = T\,t\,x$ auf die inneren Integrale anwenden und erhalten Entwicklungen der Gestalt (n natürliche Zahl)

$$(T\,t\,|x|)^{-\frac{1}{2}(m+1)} \Big(\sum_{k=0}^{n} (A_k\, e^{i\,t\,T} + B_k\, e^{-i\,t\,T})\,(t\,T\,|x|)^{-\frac{k}{2}} + 0\,((t\,T\,|x|)^{-\frac{1}{2}(n+1)})\Big)$$

wo die A_k und B_k von $e_x = \dfrac{x}{|\,x\,|}$ abhängen. Dabei wurde schon benützt,

daß $H(x) = 1$ ist. Setzen wir dies ein, so erhalten wir Integrale von der Gestalt

$$\int_{H=1} e^{i T a x} C(e_x) u_i \, d o, \text{ bzw. } \int_{H=1} |x|^{-\frac{1}{2}(m+n)+1} d o.$$

Dabei wurde benützt, daß $|x| H(e_x) = H(x) = 1$ ist. Auf die Integrale erster Art können wir Hilfssatz 2 anwenden und erhalten das gewünschte Resultat, wenn wir bei $\mathfrak{J}_1$ $n = s$, bei $\mathfrak{J}_2$ $n = s + 2$ nehmen.

Hilfssatz 10: Es sei wieder $a \neq o$, $\delta > o$ beliebig, aber so klein, daß $\delta < f(a)$, $c \geqq t \geqq o$, $T > 1$, dann ist

$$\mathfrak{J}_2 = \int_{H \leqq T} e^{iax} G_1(t x) \, d x = 0\,(T^{\frac{1}{2}(m-1)})$$

wo der 0-Term von δ abhängt.

Beweis: Es ist wie vorher $\mathfrak{J}_2 = m \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_3$ und es gelten die Formeln (16) und (17). Nun wenden wir auf die Integrale über $H = T$ Hilfssatz 2 an, nachdem wir vorher die Transformation $x = T x'$ ausgeübt haben. Dann sehen wir, daß diese innere Integrale $0\,(T^{\frac{1}{2}(m-1)})$ sind, also auch $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_3$ und damit $\mathfrak{J}_2$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

§ 2.

Hilfssatz 11: Es sei $\Phi(t)$ eine Funktion, welche folgende drei Eigenschaften erfüllt: 1. Es sei $\Phi(t)\, t^{\frac{1}{2}(m-1)}$ im *Lebesgue*schen Sinne auf $[0, \infty]$ integrierbar. 2. Es gebe eine Zahl $k > o$, so daß

$$\int_0^{\tau} |\Phi(t)|\, t^{\frac{1}{2}(m-1)} \, d t = o(\tau^k) \text{ für } \tau \longrightarrow o.$$

3. Es gebe ein $a \neq o$, so daß in einer Umgebung von $t = f(a)$, $\Phi(t)$ von beschränkter Variation ist. Dann existiert für jedes x, $\mathfrak{J}(x) = \int_0^{\infty} \Phi(t)\, t^{m-1} G_1(t x) \, d t$ und ist integrierbar und es existiert

$$\lim_{T \to \infty} \int_{H(x) \leqq T} e^{iax} \mathfrak{J}(x) \, d x.$$

Beweis: Die erste Behauptung sieht man sofort ein, denn es ist $G_1(tx) = 0\,((t|x|)^{-\frac{1}{2}(m-1)})$. Setzen wir $\mathfrak{J}(T; x) = \int_0^T \Phi(t)\, t^{m-1} G_1(tx)\, dt$, so ist für $x \neq o$ und $T_2 \geqq T_1 \geqq c$

$$|\Im(T_2; x) - \Im(T_1; x)| \leqq C |x|^{-\frac{1}{2}(m-1)} \int_{T_1}^{T_2} |\Phi(t)| t^{\frac{1}{2}(m-1)} dt \quad (17)$$

Daraus folgt

$$|\Im(T; x)| \leqq C(1 + |x|^{-\frac{1}{2}(m-1)}), \quad (18)$$

da $G_1(t\,x)$ beschränkt ist (I, § 3). Aus (18) folgt, daß $\Im(x)$ integrierbar ist und

$$|\Im(x)| \leqq C(1 + |x|^{-\frac{1}{2}(m-1)}) \quad (19)$$

Wir wenden uns nun der zweiten Behauptung zu. Es seien T_1, T_2 zwei beliebige Zahlen $\geqq T_0 > C > 0$ mit $T_1 \leqq T_2$. Es gibt zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, da in einem Intervall um $f(a)$ $\Phi(t)$ von beschränkter Variation ist, so daß z. B. im Intervall $(f(a), f(a) + \delta)$, $\Phi(t) = \Phi(f(a) + 0) + \chi_1(t) - \chi_2(t)$ ist, wo χ_1, χ_2 monoton wachsende Funktionen mit $|\chi_i| < \varepsilon$ sind. Dann ist zunächst

$$\int_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{iax}\, dx \int_{f(a)-\delta}^{f(a)+\delta} \Phi(t)\, t^{m-1} G_1(t\,x)\, dt = 0(T_0^{-\frac{1}{2}}) + \varepsilon \quad (20)$$

wo 0 von ε abhängt.

Denn nehmen wir z. B. das Integral $\int_{f(a)}^{f(a)+\delta} \Phi(t)\, t^{m-1} G_1(t\,x)\, dt$, so können wir schreiben

$$\Phi(f(a) + 0) \int_{f(a)}^{f(a)+\delta} t^{m-1} G_1(t\,x)\, dt + \int_{f(a)}^{f(a)+\delta} (\chi_1(t) - \chi_2(t))\, t^{m-1} G_1(t\,x)\, dt \quad (21)$$

Nun ist aber $t^{m-1} G_1(t\,x) = \int_{f \leqq 1} \frac{d}{dt}(t^m e^{itxy})\, dy$, also wird das erste Integral $G((f(a) + \delta)\,x)\,(f(a) + \delta)^m - G(f(a)\,x)\,(f(a))^m$.

Nun ist nach Hilfssatz 8, wo 0 von δ abhängt

$$\int_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{iax} G(t\,x)\, dx = 0(T_1^{-\frac{1}{2}}),$$

also liefert das erste Integral von (21) zu (20) einen Betrag $0(T_0^{-\frac{1}{2}})$.

Jetzt betrachten wir z. B. $\int_{f(a)}^{f(a)+\delta} \chi_1(t)\, t^{m-1} G_1(t\,x)\, dt$. Dies ist nach dem zweiten Mittelwertsatz $\chi_1(f(a) + \delta) \int_{\xi}^{f(a)+\delta} t^{m-1} G_1(t\,x)\, dt$, wo $\xi > f(a)$, ist also gleich

$$\chi_1(f(a)+\delta)\,(G((f(a)+\delta)\,x)\,(f(a)+\delta)^m - G(\xi\,x)\,(f(\xi))^m).$$

Nun ist nach Hilfssatz 8 $\int\limits_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{iax}\,G(t\,x)\,d\,x$ in t gleichmäßig beschränkt, also liefert, analog bei χ_2, das zweite Integral zu (16) einen Beitrag, dem Betrage nach $< \varepsilon$ und damit ist (20) gezeigt.

Wir betrachten jetzt

$$\int\limits_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{iax}\,d\,x \int\limits_{f(a)+\delta}^{\infty} \Phi(t)\,t^{m-1}\,G_1(t\,x)\,d\,t. \tag{22}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz des zweiten Integrals, können wir die beiden Integralzeichen vertauschen und erhalten

$$\int\limits_{f(a)+\delta}^{\infty} \Phi(t)\,t^{m-1}\,d\,t \int\limits_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{iax}\,G_1(t\,x)\;d\,x.$$

Da $\int\limits_{f(a)+\delta}^{\infty} |\,\Phi(t)\,|\,t^{\frac{1}{2}(m-1)}\,d\,t$ konvergent ist können wir ein R, so wählen, daß $\int\limits_{R}^{\infty} |\,\Phi(t)\,|\,t^{\frac{m-1}{2}}\,d\,t < \varepsilon_1$ ist. Dann ist nach Hilfssatz 8

$$\Big|\int\limits_{R}^{\infty} \Phi(t)\,t^{m-1}\,d\,t \int\limits_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{iax}\,G_1(t\,x)\,d\,x\Big| \leqq$$

$$\leqq \int\limits_{R}^{\infty} |\,\Phi(t)\,|\,t^{m-1}\,d\,t\,(0\,(t^{-\frac{1}{2}(m-1)}) + 0\,(T_1{}^{-m}\,t^{-\frac{3m}{2}}) \leqq 0\,(T_0{}^{-1}) + \varepsilon_1 \text{ ist.}$$

Nun haben wir $\int\limits_{f(a)+\delta}^{R} \Phi(t)\,B(t)\,t^{m-1}\,d\,t$ $\left(B(t) = \int\limits_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{iax}\,G_1(t\,x)\,d\,x\right)$ zu betrachten. Es gibt nun zu $\Phi(t)\,t^{\frac{1}{2}(m-1)}$ eine Treppenfunktion $P(t)$ auf $[f(a)+\delta, R]$, so daß bei bel. ε_2 $\int\limits_{f(a)+\delta}^{R} |\,\Phi(t)\,t^{\frac{1}{2}(m-1)} - P(t)\,|\,d\,t < \varepsilon_2$ ist. Nun ist nach Hilfssatz 8

$$\Big|\int\limits_{f(a)+\delta}^{R} (\Phi(t)\,t^{\frac{1}{2}(m-1)} - P(t))\,t^{\frac{1}{2}(m-1)}\;B(t)\,d\,t\Big| \leqq$$

$$\leqq 0\,(1) \int\limits_{f(a)+\delta}^{R} |\,\Phi(t)\,t^{\frac{1}{2}(m-1)} - P(t)\,|\,d\,t < 0\,(1)\,\varepsilon_2.$$

Es genügt also $\int\limits_{f(a)+\delta}^{R} P(t)\,t^{\frac{1}{2}(m-1)}\;B(t)\,d\,t$ zu betrachten. Nun ist $P(t)$ als Treppenfunktion stückweise konstant. Wir brauchen also

nur Intervalle (α, β) von $[f(a) + \delta, R]$ zu betrachten, wo $P(t)$ differenzierbar ist. Auf diesem Intervall sei M eine Schranke von $P(t)$ und $\int_\alpha^\beta |P'(t)|\, dt$. Beachten wir, daß

$$\int t^{m-1} B(t)\, dt = t^m A(t) = t^m \int_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{iax} G(t\,x)\, dx$$

ist, so erhalten wir durch partielle Integration

$$\int_\alpha^\beta P(t)\, t^{\frac{m-1}{2}} B(t)\, dt =$$

$$= t^{\frac{1}{2}(m+1)} A(t) P(t) \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \left(P'(t)\, t - \frac{m-1}{2} P(t)\right) t^{\frac{1}{2}(m-1)} A(t)\, dt$$

und dies ist nach Hilfssatz 8 $0(T_0^{-\frac{1}{2}})$.

Wir sehen also, daß

$$\int_{f(a)+\delta}^\infty \Phi(t)\, t^{m-1} B(t)\, dt = 0(T_0^{-\frac{1}{2}}) + \varepsilon_2\, 0(1) + \varepsilon_1 \tag{23}$$

ist, wo der erste 0-Term von ε_1, ε_2 der zweite von ε_1 abhängt.

Wir haben also nur mehr $\int_0^{f(a)-\delta} \Phi(t)\, t^{m-1} B(t)\, dt$ zu betrachten.

Nun ist $B(t) = \int_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{iax} G_1(t\,x)\, dx = \mathfrak{J}_2(t; T_2) - \mathfrak{J}_2(t; T_1)$, wo $\mathfrak{J}_2(t; T) = \int_{H \leqq T} e^{iax} G_1(t\,x)\, dx$ ist. Es genügt, wenn $T_1 \leqq T \leqq T_2$ $\int_0^{f(a)-\delta} \Phi(t)\, t^{m-1} \mathfrak{J}_2(t; T)\, dt$ zu betrachten. Wir behandeln zuerst

$$\int_0^\tau \Phi(t)\, t^{m-1} \mathfrak{J}_2(t)\, dt \text{ wo } \tau = C\, T^{-1+\frac{2k}{2k+m-1}}$$

Nun ist $\mathfrak{J}_2(t)$ nach Hilfssatz 10 $0(T^{\frac{1}{2}(m-1)})$ wo 0 von δ abhängt. Daher ist

$$\left|\int_0^\tau \Phi(t)\, t^{m-1} \mathfrak{J}_2(t)\, dt\right| = 0((T\tau)^{\frac{1}{2}(m-1)}) \int_0^\tau |\Phi(t)|\, t^{\frac{1}{2}(m-1)}\, dt$$

$$= o((T\tau)^{\frac{m-1}{2}} \tau^k) = o(1)$$

Wir haben also nun noch $\int_\tau^{f(a)-\delta} \Phi(t)\, t^{m-1} \mathfrak{J}_2(t)\, dt$ zu betrachten.

Da $\Phi(t)\, t^{\frac{m-1}{2}}$ in $[0, f(a) - \delta]$ integrierbar ist, gibt es zu jedem $\varepsilon_3 > 0$

wieder eine Treppenfunktion $P(t)$, so daß $\int_0^{f(a)-\delta} |\Phi(t) t^{\frac{m-1}{2}} - P(t)|\, dt < \varepsilon_3$ ist. Dann ist nach Hilfssatz 9

$$\left| \int_\tau^{f(a)-\delta} (\Phi(t)\, t^{\frac{1}{2}(m-1)} - P(t))\, t^{\frac{1}{2}(m-1)}\, \mathfrak{J}_2(t)\, dt \right| \leqq \varepsilon_3\, 0(1),$$

denn es ist, da $t\,T \geqq \tau\,T = T^{\frac{2k}{2k+m-1}}$, $t^{\frac{m-1}{2}}\, \mathfrak{J}_2(t) = 0(1) + 0(T^m (t\,T)^{-\frac{1}{2}(m+s+1)}) = 0(1)$, wenn wir $s = m + \left[\frac{m(m-1)}{k}\right]$ wählen.

Es genügt also, wie vorher ein Teilintervall (α, β) zu betrachten, wo $P(t)$ differenzierbar ist ($\tau \leqq \alpha < \beta \leqq f(a) - \delta$) und

$$\int_\alpha^\beta P(t)\, t^{\frac{m-1}{2}}\, \mathfrak{J}_2(t)\, dt$$

abzuschätzen. Nun ist wieder

$$\int t^{m-1}\, \mathfrak{J}_2\, dt = t^m\, \mathfrak{J}_1 = t^m \int_{H \leqq T} e^{iax}\, G(t\,x)\, dx$$

also erhalten wir, M wieder obere Schranke von P und $\int_\alpha^\beta |P'(t)|\, dt$

$$\int_\alpha^\beta P(t)\, t^{\frac{m-1}{2}}\, \mathfrak{J}_2(t)\, dt =$$

$$= t^{\frac{m+1}{2}}\, \mathfrak{J}_1(t)\, P(t) \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (P'(t)\, t - \frac{m-1}{2} P(t))\, t^{\frac{m-1}{2}}\, \mathfrak{J}_1\, dt$$

Nun wenden wir Hilfssatz 9 an. Es ist $t^{\frac{m-1}{2}}\, \mathfrak{J}_1 =$

$= 0((T\,t)^{-1} + t^{\frac{m-1}{2}}\, 0(T^{-1}\, T^m\, (t\,T)^{-\frac{1}{2}(m+s-1)}) = 0((T\,t)^{-1}) + 0(T^{-1})$.

Es ist also der ausintegrierte Bestandteil von der Größenordnung $0(T^{-1})$. Weiter ist $\left| \int_\alpha^\beta P'(t)\, t^{\frac{m+1}{2}}\, \mathfrak{J}_1\, dt \right| \leqq 0(T^{-1}) \int_\alpha^\beta |P'(t)|\, dt$ und $\left| \int_\alpha^\beta P(t)\, t^{\frac{m-1}{2}}\, \mathfrak{J}_1\, dt \right| \leqq 0(T^{-1}) \left(M \int_\alpha^\beta \frac{dt}{t} + 0(1)\right) = 0\left(\frac{\ln T}{T}\right)$, da $\alpha \geqq \tau \geqq T^{-1}$. Also erhalten wir, wenn wir alles zusammenfassen,

$$\int_{T_1 \leqq H \leqq T_2} e^{iax}\, dx \int_0^\infty \Phi(t)\, t^{m-1}\, G_1(t\,x)\, dt = o(1) + 0(T_0^{-\frac{1}{2}}) + \varepsilon_3\, 0(1) + \varepsilon_2\, 0(1) + \varepsilon_1 + \varepsilon$$

wo die ersten Terme von ε_3, ε_2, ε_1 abhängen und der dritte von ε_2, ε_1. Wählt man zunächst bei vorgegebenen $\varepsilon > o$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{3}$, dann ε_3 so,

daß $\varepsilon_3 0(1) < \frac{\varepsilon}{3}$ und dann T_0 so groß, daß die beiden ersten Terme $< \frac{\varepsilon}{3}$ werden, so wird für alle $T_1, T_2 > T_0(\varepsilon)$ das Integral $< \varepsilon$, d. h. der Hilfssatz ist bewiesen.

Hilfssatz 12: Es sei $\Phi(t)$ eine Funktion so beschaffen, daß $\int_{R_m} \Phi(f(x))(f(x))^{-\frac{m+1}{2}} dx$ absolut integrierbar ist. Weiter sei $\Phi(t)$ in einer Umgebung von $f(a)$ von beschränkter Variation und weiter existiere $\Im(x) = \lim_{T\to\infty} \Im(T; x)$, wo $\Im(T; x) = \int_{f(y)\leqq T} \Phi(f(y)) e^{ixy} dy$ mit $|\Im(T; x)| \leqq C(1 + |x|^{-\frac{m-1}{2}})$ und es existiere

$$C = \frac{1}{(2\pi)^m} \lim_{T\to\infty} \int_{H(x)\leqq T} e^{iax} \Im(x) dx.$$

Dann ist

$$C = \tfrac{1}{2}(\Phi(f(a)+0) + \Phi(f(a)-0)) \tag{24}$$

Beweis: Wir betrachten zuerst die Funktion

$$S_T(y) = \begin{cases} (1 - \frac{H^2(y)}{T^2})^{\frac{m+1}{2}} & \text{für } H(y) \leqq T \\ 0 & H(y) > T \end{cases} \quad \text{und } L_T(x) = \int_{R_m} S_T(y) e^{ixy} dy$$

Es ist, da $H(y) = H(-y)$, $L_T(x) = L_T(-x)$ und $L_T(\frac{x}{T}) = T^m L(x)$ wo $L_1(x) = L(x)$ gesetzt ist. Da nach I, § 5 $L_T(x) = 0(T^{-1}|x|^{-(m+1)})$, so ist also $\int_{R_m} L_T(x) dx$ absolut konvergent und da S_T stetig ist, so ist nach *Bochner*, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, S. 192, Satz 59

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{R_m} L_T(x) e^{iax} dx = S_T(a), \text{ insbesondere } \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{R_m} L_T(x) dx = 1.$$

Da $|x|^{-\frac{m-1}{2}}$ integrierbar ist, so ist es auch $\Im(x)$. Weiter benützen wir, daß Integral mit Limes vertauscht werden kann, und daß $\Phi(f(y)) L_T(y-a)$ über den ganzen R_m absolut integrierbar ist. Das sieht man so ein: Es ist für jedes $R > o$ und jedes y mit $|y| \geqq |a| + R$,

wegen $|y| \leqq |y-a| + |a|$, $f(y)^{\frac{m-1}{2}} |y-a|^{-(m+1)} \leqq$

$$\leqq C\left(1+\frac{|a|}{R}\right)^{\frac{m-1}{2}} R^{-\frac{m+3}{2}} = C_R.$$

Für diese y ist also $\Phi(f) L_T(y-a) \leqq T^{-1} 0(|\Phi(f)| |y-a|^{-(m+1)}) \leqq$

$\leqq C_R T^{-1} 0(|\Phi(f)| f(y)^{-\frac{m-1}{2}})$ und daraus folgt alles.

Wir bilden nun $A_T = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{H(x) \leqq T} \Im(x) \left(1 - \frac{H^2(x)}{T^2}\right)^{\frac{m+1}{2}} e^{iax}\, dx.$

Es ist

$$A_T = (2\pi)^{-m} \lim_{T_1 \to \infty} \int_{f(y) \leqq T_1} \Phi(f(y)) L_T(y-a)\, dy = (2\pi)^{-m} \int_{R_m} \Phi(f(y)) L_T(y-a)\, dy =$$

$$= (2\pi)^{-m} \int_{R_m} \Phi(f(y+a)) L_T(y)\, dy. \tag{25}$$

Nun ist $\Phi(t)$ in einer Umgebung von $f(a)$ von beschränkter Variation, d. h. es gibt ein c, so daß für alle t mit $|t - f(a)| < c$, $\Phi(t)$ beschränkt ist. Wir können wegen der Stetigkeit von $f(y)$ in a eine Kugel $K_\varrho: |y| \leqq \varrho$ so bestimmen, daß $|f(y+a) - f(a)| < c$ ist, also ist in dieser Kugel K_ϱ: $\Phi(f(y+a))$ beschränkt.

Wir wollen nun zunächst für großes T $\int_{|y| > \varrho} \Phi(f(y+a)) L_T(y)\, dy$ abschätzen. Es ist dieses Integral dem Betrage nach

$$\leqq \frac{1}{T} 0\left(\int_{|y| \geqq \varrho} |\Phi(f(y+a))| |y|^{-(m+1)} dy\right) =$$

$$= \frac{1}{T} 0\left(\int_{|y-a| \geqq \varrho} |\Phi(f(y))| |y-a|^{-(m+1)} dy\right) \leqq \frac{C_\varrho}{T} \int_{|y-a| > \varrho} |\Phi(f)| f(y)^{-\frac{m-1}{2}} dy,$$

(es ist dies die gleiche Abschätzung wie vorher), also strebt es für $T \longrightarrow \infty$ gegen 0.

Es genügt daher $(2\pi)^{-m} \int_{K_\varrho} \Phi(f(y+a)) L_T(y)\, dy$ zu studieren.

Wir setzen nun $\psi(f(y+a)) = \Phi(f(y+a))$ für $|y| \leqq \varrho$ und Null, wenn $|y| > \varrho$. Dann ist ψ im R_m beschränkt und unser Integral schreibt sich, wenn wir noch die Substitution $y' = yT$ ausüben, nach den Eigenschaften von L

$$(2\pi)^{-m} \int_{R_m} \psi\left(a + \frac{y}{T}\right) L(y)\, dy.$$

Nun war $(2\pi)^{-m} \int_{R_m} L(y)\, dy = 1$ und $L(y) = L(-y)$.

Wir legen nun durch den Koordinatenursprung eine Ebene E, parallel zur Tangentialebene an die Fläche $F: f(x) = f(a)$ im Punkte a. Diese Ebene zerlegt den R_m in zwei Teilräume R_1 und R_2. Dabei sei R_1 der Teilraum, der a im Innern enthält. Die Punkte von E rechnen wir zu R_1. Da R_1 und R_2 durch Spiegelung (abgesehen von E) an o in sich übergehen, so folgt wegen $L(-y) = L(y)$, daß $\int\limits_{R_1} L(y)\, dy =$ $= \int\limits_{R_2} L(y)\, dy = \frac{1}{2}(2\pi)^m$.

Wir betrachten nun zunächst

$$\int\limits_{R_1} (\psi(a + \frac{y}{T}) - \Phi(f(a) + 0))\, L(y)\, dy.$$

Es ist $\int\limits_{R_1} L(y)\, dy$ absolut konvergent; es gibt also zu jedem $\varepsilon > o$ ein $A = A(\varepsilon)$, so daß, wenn K die Kugel $|y| \leqq A$, K_1, K_2 die Hälften dieser Kugel in R_1, R_2 sind, $\int\limits_{R_1 - K_1} |L(y)|\, dy < \varepsilon$ ist. Daher ist auch unser Integral über $R_1 - K_1 < \varepsilon$. Wir brauchen daher nur mehr

$$\int\limits_{K_1} (\psi(a + \frac{y}{T}) - \Phi(f(a) + 0))\, L(y)\, dy$$

zu betrachten. Nun gibt es doch zu jedem ε_1 ein δ, so daß $|\Phi(t) - \Phi(f(a) + 0)| < \varepsilon$ ist, wenn $0 < t - f(a) < \delta$.

Es gibt sicher ein $\sigma < \varrho$, so daß für alle z mit $|z| < \sigma$, $|f(a + z) - f(a)| < \delta$ ist; dies ist der Fall, für $z = \frac{y}{T}$, wenn $T > T_0(\varepsilon)$. Es liegt z in R_1, daher $a + z$ in dem Halbraum der Tangentialebene von a an F, der außer a, keinen Punkt der Fläche enthält. Daher ist $f(a + z) > f(a)$. Wir erhalten für unser Integral, da ja $\psi = \Phi$ für $|z| < \sigma$, daß es dem Betrage nach $\leqq \varepsilon \int\limits_{R_m} |L(y)|\, dy$ für $T > T_0(\varepsilon)$ ist.

Jetzt betrachten wir $\int\limits_{R_2} (\psi(a + \frac{y}{T}) - \Phi(f(a) - 0))\, L(y)\, dy$ und schließen wie früher, daß wir eine Kugel K so wählen können, daß $\int\limits_{R_2 - K_2} |L(y)|\, dy < \varepsilon$ ist. Wir können uns daher auf $\int\limits_{K_2} (\psi(a + \frac{y}{T}) - \Phi(f(a) - 0))\, L(y)\, dy$ beschränken. Wir legen nun zur Ebene E durch o eine parallele Ebene im R_2, welche von E den Abstand ε hat. Diese schneidet aus K_2 eine Schicht K^* heraus, deren Volumen $\leqq C\varepsilon$

(wenn wir $\varepsilon < 1$ annehmen) ist. Es ist das Integral über K^* sicher $\leqq C_1 \varepsilon$ (C_1 Konstante). Für alle z in $K_2 - K^*$ hat die Gerade $x = a + z\lambda$ (λ Parameter) mit dem Körper $f(x) < f(a)$ eine Strecke gemeinsam, so daß das Infimum der Längen dieser Strecken, es sei $l(\varepsilon) > o$, ist. Die Tangentialebene in a berührt ja F von erster Ordnung. Nun können wir wie früher vorgehen. Es gibt zu jedem ε ein δ, so daß für $-\delta < t - f(a) < 0$, $|\Phi(t) - \Phi(f(a) - 0)| < \varepsilon$ ist. Dann gibt es wieder ein $\sigma < \varrho$, so daß für alle $|z| < \sigma$, $|f(a+z) - f(a)| < \delta$ ist. Dies ist für $z = \frac{y}{T}$ der Fall, wenn $T > T_0(\varepsilon)$. Nun liegt z im R_2, außerhalb K^*. Wählen wir noch T_0 so groß, daß $|z| < l(\varepsilon)$ ist, dann ist $f(a+z) < f(a)$. Daher ist wie früher für $T > T_0(\varepsilon)$, das obige Integral $\leqq \varepsilon \int\limits_{R_m} |L(y)|\, d\,y$. Fassen wir alles zusammen, so sehen wir, daß (25) für $T \to \infty$ einen Limes besitzt, und zwar $\frac{1}{2}(\Phi(f(a)+0) + \Phi(f(a)-0))$.

Nun existiert nach Voraussetzung $C = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_{H(x)\leqq T} e^{iax}\, \mathfrak{J}(x)\, d\,x$. Dann existiert für jedes $s \geqq o$, $\lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_{H\leqq T} (1 - \frac{H^2(x)}{T^2})^s\, \mathfrak{J}^*(x)\, d\,x$ (wo $\mathfrak{J}^* = e^{iax}\, \mathfrak{J}(x)$), und hat denselben Grenzwert C. Wir setzen $F_s(T) = \int\limits_{H(x)\leqq T} (T^2 - H^2(x))^s\, \mathfrak{J}^*(x)\, d\,x$, so ist also $\lim\limits_{T\to\infty} F_0(T)$ vorhanden und gleich C. Es ist nun, nach Hilfssatz 1, wenn $s > o$

$$F_s(T) = 2s \int_0^T t\,(T^2 - t^2)^{s-1}\, d\,t\, F_0(t).$$

Nun ist $2s \int\limits_0^T (T^2 - t^2)^{s-1}\, t\, d\,t = T^{2s}$, daher

$$\frac{F_s(T)}{T^{2s}} - C = \frac{2s}{T^2} \int_0^T (1 - \frac{t^2}{T^2})^{s-1}\, t\,(F_0(t) - C)\, d\,t \qquad (26)$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein $t_0(\varepsilon)$, so daß für alle $t > t_0(\varepsilon)$, $|F_0(t) - C| < \varepsilon$ ist. Weiters gibt es ein M, so daß $|F_0(t) - C| < M$ für alle $t \geqq o$. Daher ist der Ausdruck links in (26) dem Betrage nach

$$\leqq \frac{2s}{T^2} M \int_0^{t_0} (1 - \frac{t^2}{T^2})^{s-1}\, t\, dt + \frac{2s}{T^2} \varepsilon \int_{t_0}^T (1 - \frac{t^2}{T^2})^{s-1}\, t\, dt$$

Das zweite Integral ist $\leqq 2s \int\limits_0^T (1 - \frac{t^2}{T^2})^{s-1}\, t\, dt = T^2$, das erste

$\leqq t_0^2$. Wählen wir also T_0 so groß, daß $M t_0^2 T_0^{-2} < \varepsilon$ wird, so ist der ganze Ausdruck für alle $T > T_0$ kleiner $< 2\varepsilon$. Damit ist die Behauptung und der ganze Hilfssatz bewiesen.

Satz 1: Es sei $\Phi(t)$ eine Funktion, welche folgende drei Eigenschaften erfüllt: 1. Es sei $\Phi(t)\, t^{\frac{m-1}{2}}$ im *Riemann*schen Sinne auf $[0, \infty]$ absolut integrierbar. 2. Es gebe eine Zahl $k > 0$, so daß $\int_0^\tau |\Phi(t)|\, t^{\frac{m-1}{2}}\, dt = 0(\tau^k)$ für $\tau \to 0$. 3. Es gebe ein $a \neq 0$, so daß in einer Umgebung von $t = f(a)$, $\Phi(t)$ von beschränkter Variation sei. Dann ist $\Phi(f(y))\, e^{ixy}$ auf $f(y) \leqq T$ im *Riemann*schen Sinne absolut integrierbar; es existiert weiter $\Im(x) = \lim_{T\to\infty} \Im(T; x) = \lim_{T\to\infty} \int_{f\leqq T} \Phi(f)\, e^{ixy}\, dy$, welches auf $H(x) \leqq T$ (T bel.) im *Riemann*schen Sinne integrierbar ist; es existiert $\lim_{T\to\infty} \int_{H(x)\leqq T} e^{iax}\, \Im(x)\, dx$ und es ist

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \lim_{T\to\infty} \int_{H\leqq T} e^{iax}\, \Im(x)\, dx = \tfrac{1}{2}(\Phi(f(a)+0) + \Phi(f(a)-0)) \quad (27)$$

Beweis: Ist nun $\Phi(t)\, t^{\frac{m-1}{2}}$ auf einem Intervall $[a, b]$, wo $a > o$ R-integrierbar, so ist es auch $\Phi(t)$, also nach Hilfssatz 1 $\Phi(f(x))$ auf $a \leqq f(x) \leqq b$. Da nun auch $f(x)^{-\frac{m+1}{2}}$ R-integrierbar ist, so auch $\Phi(f(x))\, f(x)^{-\frac{m+1}{2}}$ und es ist wieder nach Hilfssatz 1

$$\int_{a\leqq f\leqq b} \Phi(f(x))\, f(x)^{-\frac{m-1}{2}}\, dx = m\, \Im \int_a^b \Phi(t)\, t^{\frac{m-1}{2}}\, dt. \quad (28)$$

Aus den Voraussetzungen folgt dann leicht unter Benützung von (28), daß $\Phi(f(x))\, f(x)^{-\frac{m-1}{2}}$ im R_m im *Riemann*schen Sinne absolut integrierbar ist. Unter Benutzung von Hilfssatz 1, folgt, daß auf jedem Intervall $[a, b]$, $a > o$, wo $\Phi(t)$ beschränkt ist

$$\int_{a\leqq f\leqq b} \Phi(f(y))\, e^{ixy}\, dy = \int_a^b \Phi(t)\, t^{m-1}\, G_1(tx)\, dt$$

ist und daraus folgt wieder, wie im Hilfssatz, durch Grenzübergang, daß $\Im(x)$ existiert. Es ist nun $\Im(x)$ über jeden beschränkten, im *Jordan*schen Sinne meßbaren, Bereich B im R_m integrierbar. Es sei zunächst B

so beschaffen, daß o äußerer Punkt von B ist. Dann gibt es ein $\varrho > o$, so daß für alle x aus B, $|x| \geqq \varrho$ ist. Dann folgt aus (17), daß $\Im(T; x)$ gleichmäßig in B gegen $\Im(x)$ konvergiert. Also ist $\Im(x)$ integrierbar. Weiters ist nach (19) $\Im(x) \leqq C(1 + |x|^{-\frac{m-1}{2}})$. Daraus folgt durch Grenzübergang, daß $\Im(x)$ auch über alle B R-integrierbar ist, welche o enthalten. Da jede Funktion, welche im *Riemann*schen Sinne absolut integrierbar ist, dies auch im *Lebesgue*schen Sinne ist, so folgt unter Benutzung der Hilfssätze 11 und 12, der Satz.

Daraus ergeben sich, wenn wir für $\lim_{T\to\infty} \int_{H\leqq T}$ kurz $\int_H$ schreiben, die *Folgerungen*:

1.

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_H e^{iax} G(x)\, dx = \begin{cases} 1 \\ \tfrac{1}{2} \text{ wenn } \begin{cases} o < f(a) < 1 \\ f(a) = 1 \end{cases} \\ 0 \qquad\quad f(a) > 1 \end{cases} \tag{29}$$

2. Ist $\delta > o$, dann ist

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_H e^{iax} \int_{f(y)\leqq 1} (1 - f^2(y))^\delta e^{ixy}\, dy = \begin{cases} (1-f^2(a))^\delta \\ 0 \end{cases} \text{, wenn } \begin{cases} 0 < f(a) \leqq 1 \\ f(a) > 1 \end{cases}$$

Wir wollen jetzt noch einen Hilfssatz herleiten.

Hilfssatz 13: Es ist für $s \geqq o$

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \lim_{T\to\infty} \int_{H(x)\leqq T} \left(1 - \frac{H^2(x)}{T^2}\right)^s e^{iax} G(x)\, dx = \begin{cases} 1 \\ \tfrac{1}{2} \text{ wenn } \begin{cases} o < f(a) < 1 \\ f(a) = 1 \end{cases} \\ 0 \qquad\quad f(a) > 1 \end{cases} \tag{31}$$

und es ist für festes $s > \tfrac{1}{2}(m-1)$

$$\Im_s = \int_{H\leqq T} \left(1 - \frac{H^2(x)}{T^2}\right)^s e^{iax} G(x)\, dx$$

für alle a und T gleichmäßig beschränkt.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus den Überlegungen bei Hilfssatz 12. Wir zeigen nun die zweite Behauptung.

Es ist

$$\Im_s = \int_{f(y)\leqq 1} dy \int_{H(x)\leqq T} \left(1 - \frac{H^2(x)}{T^2}\right)^s e^{ix(a+y)}\, dx = \int_{f(y-a)\leqq 1} \Im^*(y)\, dy$$

wo

$$\Im^*(y) = \int_{H\leqq T} \left(1 - \frac{H^2(x)}{T^2}\right)^s e^{ixy}\, dx$$

Es ist $$|\mathfrak{S}^*(y)| \leqq \int\limits_{H \leqq T} (1 - \frac{H^2}{T^2})^s \, d\,x \leqq C\, T^m$$

und für $T\,|\,y\,| \geqq C_1 > 1$, $|\mathfrak{S}^*(y)| = 0\,(T^{\frac{m-1}{2}-s}\,|\,y\,|^{-\frac{m+1}{2}-s})$ nach I, § 5.

Nun folgt aus $f(y-a) \leqq 1$, $f(y) \leqq 1 + f(a)$, also $|\,y\,| \leqq C_2(1+f(a))$

Daher ist

$$|\mathfrak{S}_s| \leqq \int\limits_{|y| \leqq C_2(1+f(a))} |\mathfrak{S}^*(y)|\, d\,y \leqq \int\limits_{|y|T \leqq C_1} + \int\limits_{C_1 \leqq |y|T \leqq C_2 T(1+f(a))}$$

Das erste Integral ist $\leqq C_3$. Das zweite Integral ist

$$0\,(\int\limits_{C_1 \leqq |y|T \leqq C_2(1+f(a))T} T^{\frac{m-1}{2}-s}\,|\,y\,|^{-\frac{m+1}{2}-s}\, d\,y) \leqq T^{\frac{m-1}{2}-s}\, 0\left(\int\limits_{\frac{C_1}{T}}^{\infty} \frac{d\,|\,y\,|}{|y|^{s-\frac{m-3}{2}}}\right) = 0(1)$$

und damit ist alles gezeigt.

§ 3.

Es sei $P(E)$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion im R_m, also eine Mengenfunktion, welche für jede *Borel*sche Menge definiert ist, vollständig additiv ist, $0 \leqq P(E) \leqq 1$ und $P(R_m) = 1$ ist. Es sei $\varphi(t) = \int\limits_{R_m} e^{itx}\, d\,P(x)$ die charakteristische Funktion von P

Dann gilt

Satz 2: Es sei $S: f(x-\xi) \leqq 1$ eine Stetigkeitsmenge von $P(E)$, dann ist, für jedes $k > \frac{m-1}{2}$.

$$P(S) = \frac{1}{(2\pi)^m} \lim_{T \to \infty} \int\limits_{H(t) \leqq T} (1 - \frac{H^2(t)}{T^2})^k\, e^{-i\xi t}\, G(t)\, \varphi(t)\, d\,t \tag{32}$$

Beweis: Es ist nach Hilfssatz 13

$$(2\pi)^m\, s(h, T) = \int\limits_{H \leqq T} (1 - \frac{H^2}{T^2})^k\, e^{iht}\, G(t)\, d\,t$$

beschränkt, und zwar gleichmäßig in h und t. Weiter ist nach Folgerung 1, § 2

$$\lim_{T \to \infty} s(h, T) = \begin{cases} 1 & o < f(h) < 1 \\ \frac{1}{2} & f(h) = 1 \\ 0 & f(h) > 1 \end{cases}$$

Wir bilden nun

$$P_T(S) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{H \leqq T} (1 - \frac{H^2}{T^2})^k e^{-i\xi t} G(t) \varphi(t) \, dt =$$

$$= \int_{H \leqq T} dt \, (1 - \frac{H^2}{T^2})^k e^{-i\xi t} G(t) \int_{R_m} e^{itx} \, d P(x).$$

Nun ist der erste Teil des Integranden beschränkt. Wir erhalten daher $P_T(S) = \int_{R_m} d P(x) \, s(x - \xi, T)$. Nun ist $s(x - \xi, T)$ beschränkt und $\lim_{T \to \infty} s(x - \xi, T)$ fast überall vorhanden, daher

$$\lim_{T \to \infty} \int_{R_m} d P(x) \, s(x - \xi, T) = \int_{R_m} d P(x) \lim_{T \to \infty} s(x - \xi, T) = P(S)$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

§ 4.

In diesem Paragraphen wollen wir uns mit Lattice distributions beschäftigen. Darunter verstehen wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(E)$, deren Maße in den Punkten

$$x_0 + A g$$

konzentriert ist, wo g alle Gitterpunkte des R_m durchläuft und A eine Matrix mit $|A| \neq o$ ist. Wir wollen gleich $|A| = 1$ annehmen. Es sei nun $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen im R_m mit der obigen Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(E)$ und bilden nun die Variable

$$^{(n)}x = \frac{1}{\sqrt{n}} (x^{(1)} + \ldots + x^{(n)})$$

deren Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_n(E)$ ein Punktspektrum in $\frac{1}{\sqrt{n}} (n x_0 + A g)$ besitzt. Wir wollen nun noch voraussetzen, daß die Mittelwerte der $x^{(i)}$, die gemischten Momente zweiter Ordnung und die Momente dritter Ordnung o sind, die Streuungen 1 und die vierten Momente endlich sind. Dann ist nach einem Satz von Esseen (Kapitel 8, Satz 1) die Wahrscheinlichkeitsmasse $q^{(n)}(\xi)$ in einem Unstetigkeitspunkt von $P_n(E)$

$$q^{(n)}(\xi) = \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} + 0(n^{-\frac{m}{2}-1})$$

Es sei nun $\mu_n(a)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ${}^{(n)}x$ in dem Körper $f(x) \leqq a$ liegt. Dann ist

$$\mu_n(a) = \sum_{f(\xi) \leqq a} q^{(n)}(\xi)$$

also

$$\mu_n(a) = \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{m}{2}}} \sum_{f(nx_0+Ag)^2 \leqq a\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2n}(nx_0+Ag)^2} + \sum_{f(nx_0+Ag) \leqq a\sqrt{n}} 0\left(n^{-\frac{m}{2}-1}\right) = \nu(n) + \varrho(n) \quad (33)$$

Da $\sum_{f(\,) \leqq a\sqrt{n}} 1 = 0\left(n^{\frac{m}{2}}\right)$, ist $\varrho = 0\left(\frac{1}{n}\right)$.

Wir setzen noch $x_0 = -Ax$, dann ist $\nu(n) = \nu(n; x)$ von der Form $\sum_g \Phi(A(g - nx))$, wo $\Phi(x) = C_n e^{-\frac{x^2}{2n}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ $(C_n = (2\pi n)^{-\frac{m}{2}})$ dabei ist $\varphi(x)$ die charakteristische Funktion von $f(x) \leqq a$.

Wir betrachten gleich allgemeiner

$$\Phi_\delta(x) = C_n \left(a^2 - \frac{f^2(x)}{n}\right)^\delta e^{-\frac{x^2}{2n}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right), \quad (\delta \geqq 0)$$

und

$$\nu_\delta(n; x) = \sum_g \Phi_\delta(A(g - nx)).$$

Es ist nun ν_δ in x periodisch und zwar in jeder Koordinate mit der Periode n^{-1}. Wir entwickeln daher ν_δ formal in eine Fouriersche Reihe

$$\nu_\delta = \sum_g \Phi_\delta(A(g - nx)) \sim \sum_l a_{l,\delta} e^{2\pi i n l x} \quad (34)$$

Dann erhalten wir für die Fourierkoeffizienten $a_{l,\delta}$, wenn E der Einheitswürfel $o \leqq x_i \leqq 1$, E_n der Würfel $o \leqq x_i \leqq n^{-1}$ ist

$$a_{l,\delta} = n^m \sum_g \int_{E_n} \Phi_\delta(A(g - nx)) e^{-2\pi i n l x}\, dx = \sum_g \int_E \Phi_\delta(A(g - x)) e^{-2\pi i l x}\, dx$$

daher

$$a_{l,\delta} = \int_{R_m} \Phi_\delta(x) e^{-2\pi i k x}\, dx \quad (k = A^{-1} l)$$

Setzen wir jetzt für Φ_δ ein, so erhalten wir

$$a_{l,\delta} = C_n \int_{f(x) \leqq a\sqrt{n}} \left(a^2 - \frac{f^2(x)}{n}\right)^\delta e^{-\frac{x^2}{2n} - 2\pi i k x}\, dx =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{f \leqq a} (a^2 - f^2(x))^\delta e^{-\frac{x^2}{2} - 2\pi i \sqrt{n} k x}\, dx \quad (35)$$

Also insbesondere für $\delta = o$ ($a_{l,0} = a_l$ gesetzt)

$$a_l = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{f \leqq a} e^{-\frac{x^2}{2} - 2\pi i \sqrt{n}\, kx}\, dx,\quad a_0 = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{f(x) \leqq a} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Um nun $a_{l,\delta}$ abzuschätzen, betrachten wir zunächst das Integral $\int\limits_{f \leqq 1} e^{i\omega x_1 - \frac{C}{2}(x^2{}_1 + \ldots + x_l^2)}\, dx$, wo die x_i die Koordinaten von x sind, $c, \omega > o$ und $1 \leqq t \leqq n$ ist. Auf dieses Integral können wir Hilfssatz 3 von § 2 anwenden und sehen, daß es $0\,(\omega^{-\frac{m+1}{2}})$ ist.

Jetzt betrachten wir allgemeiner das Integral

$$\int\limits_{f \leqq 1} (1 - f^2(x))^{\frac{k}{2}}\, e^{i\omega x_1 - \frac{C}{2}(x^2{}_1 + \ldots + x^2 t)}\, dx$$

(k natürliche Zahl). Dies ist aber, von einem konstanten Faktor abgesehen, nichts anderes, als $\int\limits_{f^*(x,y) \leqq 1} e^{i\omega x_1 - \frac{C}{2}(\,)}\, dx\, dy$ wo $f^*(x, y)$ die $m + k$-dimensionale Distanzfunktion $(f^2(x) + y_1{}^2 + \ldots + y_k{}^2)^{\frac{1}{2}}$ ist (vgl. dazu II, § 2, Satz 2). Also können wir wieder Hilfssatz 3 von § 2 anwenden und sehen, daß es von der Größenordnung $0\,(\omega^{-\frac{1}{2}(m+k+1)})$ ist. Es ist also, wenn wir jetzt $t = m$ setzen

$$\int\limits_{f(x) \leqq 1} (1 - f^2(x))^{\delta}\, e^{i\omega x_1 - \frac{C}{2}x^2}\, dx = 0\,(\omega^{-\frac{1}{2}(m+1)-\delta})$$

wenn $\delta = \frac{k}{2}$ (k natürliche Zahl) ist. Man kann leicht zeigen (wie in II, § 2), daß es für jedes $\delta > 0$ gilt. Man könnte ohne weiteres das Hauptglied der asymptotischen Entwicklung dieser Integrale genau angeben. Aus dieser Abschätzung folgt sofort durch eine Drehung und durch eine Streckung

$$\int\limits_{f \leqq a} (a^2 - f^2)^{\delta}\, e^{-ibx - \frac{1}{2}x^2}\, dx = 0\,(|b|^{-\frac{1}{2}(m+1)-\delta}).$$

Dabei haben wir die Abhängigkeit von a unterdrückt, benützt, daß x^2 eine orthogonale Invariante ist und $c = a^2$ genommen. Daraus folgt

$$a_{l,\delta} = 0\,((|k|\sqrt{n})^{-\frac{1}{2}(m+1)-\delta}) \quad (\delta = \frac{k}{2}) \tag{36}$$

Für $\delta > \frac{m-1}{2}$ konvergiert also die Reihe $\sum_l |a_{l,\delta}|$. Daher können wir schließen, genau so wie in I, § 7, daß für $\delta > \frac{m-1}{2}$

$$v_\delta = \sum_l a_{l,\delta}\, e^{2\pi i n l x}$$

ist. Wir können jetzt, wenn wir wie in I, § 8 bei dem Problem der Gitterpunkte, vorgehen, zeigen, daß

$$v = v_0 = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{f(y)\leqq a} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy + 0\,(n^{-\frac{m}{m+1}})$$

ist. Dazu müssen wir uns aber noch überlegen (vgl. I, S. 27, Z. 7 v. u., wo dies für $\Phi(u)$ trivial war), daß wenn $(2\pi n)^{\frac{m}{2}} v(n) = \sigma(n, x)$ gesetzt wird

$$\sigma(n; x) \leqq (1 + \frac{C}{n})\, \sigma(n + t; x) \tag{37}$$

ist, wenn $0 \leqq t < n$ ist, für alle $n > C_1$. Wir können dabei o. B. d. A. annehmen $0 \leqq x_i \leqq n^{-1}$.

Es ist $(A(g + n x) = y(n))$

$$\sigma(n; x) = \sum_{f(y(n))\leqq a\sqrt{n}} e^{-\frac{y^2(n)}{2n}} \leqq \sum_{f(y(n+t))\leqq a\sqrt{n+t}} e^{-\frac{y^2(n)}{2n}} \tag{38}$$

Denn ist a so beschaffen, daß $f(Ax) \leqq \alpha |x|$ und ist $n \geqq \left(\frac{3\,\alpha\, m}{a}\right)^2$, so gilt für jeden Gitterpunkt mit $f(y(n)) \leqq a\sqrt{n}$,

da $a(\sqrt{n+t} - \sqrt{n}) > \frac{a t m}{n}$

$$f(y(n+t)) \leqq a\sqrt{n} + t f(Ax) \leqq a\sqrt{n} + \alpha t |x| \leqq a\sqrt{n} + \frac{a t m}{n} \leqq a\sqrt{n+t}.$$

Weiter ist aber $\frac{1}{n}\, y^2(n) - \frac{1}{n+t}\, y^2(n+t) = |Ag|^2 (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}) - t x^2 \geqq$

$$\geqq -\frac{m}{n}\, C_2 t$$

also ist die zweite Summe (38)

$$\leqq e^{\frac{m t}{2n} C_2}\, \sigma(n + t;\ x) \leqq (1 + \frac{C}{n})\, \sigma(n + t; x),$$

wenn $n \geqq C_1 = (\frac{3\,\alpha\,m}{a})^2 + 2\,m\,c_2$ und $C = \frac{1}{2}\,m\,C_2$ ist.

Daher können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 3: Es ist

$$\mu_n(a; x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{f(y) \leqq a} e^{-\frac{y^2}{2}}\, d\,y + 0\,(n^{-\frac{m}{m+1}}) \tag{39}$$

Wir können aber, wenn wir eine Nullmenge in x vernachlässigen, folgendes zeigen:

Satz 4: Es ist für fast alle x aus $E: 0 \leqq x_i \leqq 1$ für $m \geqq 5$

$$\mu_n(a; x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{f(y) \leqq a} e^{-\frac{y^2}{2}}\, d\,y + 0\,(n^{-1}). \tag{40}$$

Beweis: Es genügt, diese Behauptung für $\nu(n; x)$ zu zeigen. Wir hatten

$$\nu(n; x) \sim \sum_l a_l\, e^{2\pi i n l x}$$

wo $a_0 = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{f \leqq a} e^{-\frac{y^2}{2}}\, d\,y$. Nach dem Satz von *Hausdorff-Young* ist für $\beta = 2 + \frac{1}{m}$, wo $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$

$$\sigma_\beta = [n^m \int\limits_{E_n} (\nu(n; x) - a_0)^\beta\, d\,x]^{\frac{1}{\beta}} \leqq ((2\pi)^{-\frac{m}{2}}\, \Sigma'\, |a_l|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 0\,(n^{-\frac{m+1}{4}}) \tag{41}$$

wegen (36), da ja $\alpha = 1 + \frac{m}{m+1}$ und $\Sigma' |a_l|^\alpha$ konvergiert. Es ist

$$n^m \int\limits_{E_n} (\nu - a_0)^\beta\, d\,x = \int\limits_{E} (\nu - a_0)^\beta\, d\,x.$$

Es ist also

$$\sigma_\beta^\beta = \int\limits_{E} (\nu - a_0)^\beta\, d\,x = 0\,(n^{-\frac{\beta}{4}(m+1)})$$

Es sei nun bei festem n, M die Teilmenge von E, wo

$$|R| = |\nu(n; x) - a_0| \geqq \sqrt{n}\, \sigma_\beta,$$

dann ist

$$\sigma_\beta^\beta \geqq \int\limits_{M} |R|^\beta\, d\,y \geqq n^{\frac{\beta}{2}}\, \sigma_\beta^\beta\, V(M),$$

wo $V(M)$ das Maß von M ist. Es ist also $V(M) \leqq n^{-\frac{\beta}{2}}$.

Wir wollen nun zeigen, daß $| R(n; x) | \leqq C(x) n^{-1}$ ist, für $n \longrightarrow \infty$ und fast alle x. Wir müssen daher zeigen, daß die Menge $\overline{M}$ für die $| R | \leqq \sqrt{n}\, \sigma_\beta$, das Maß 1 hat, denn es ist

$$\sqrt{n}\, \sigma_\beta = 0\,(\sqrt{n}\, n^{-\frac{m+1}{4}}) = 0\,(n^{-1}) \text{ für } m \geqq 5.$$

Es sei stets M^* das Komplement zu M in E. Dann ist $\overline{M} = \Sigma S_n$, wo $S_n = \prod_{j=n}^{\infty} M_j^*$. Dabei ist M_j = Menge $\{ | R(n; x) | \geqq \sqrt{n}\, \sigma_\beta \}$. Es ist also $V(S_n^*) \leqq \sum_{j=n}^{\infty} V(M_j) \leqq \sum_{j=n}^{\infty} j^{-\frac{\beta}{2}} < \eta$ für $n > n_0(\eta)$ für jedes $\eta > 0$, denn die letzte Reihe ist konvergent, daher $V(\overline{M}) > 1 - \eta$ für alle $\eta > 0$ w.z.b.w.

§ 5.

Es sei jetzt $P(E)$ eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit der gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(E)$ und ihrer charakteristischen Funktion $\varphi(t)$. Weiters setzen wir für die Koordinaten der Variablen x der Folge voraus, daß

1. der Mittelwert jedes x_i Null ist,
2. die Streuung der x_i 1 ist,
3. die gemischten Momente zweiter Ordnung Null sind,
4. die vierten Momente β_i^4 endlich sind $\beta_4 = \sum_{i=1}^{m} \beta_i^4$.

Es sei weiter ${}^{(n)}x = \frac{1}{\sqrt{n}} (x^{(1)} + \ldots + x^{(n)})$ und $\mu_n(a)$ die Wahrscheinlichkeit, daß $f({}^{(n)}x) \leqq a$, dann gilt

Satz 5: Es ist

$$| \mu_n(a) - (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{f(x) \leqq a} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx | \leqq C \frac{\beta_4^{3/2}}{n^{\frac{m}{m+1}}} \tag{42}$$

wo C nur vom Eichkörper $f(x) \leqq 1$ abhängt.

Für die Kugel wurde dieser Satz von *Esseen* aufgestellt. Er enthält Satz 3. Der Beweis kann genau wie bei *Esseen* geführt werden. Es soll daher nur angegeben werden, welche Modifikationen anzubringen sind. Zunächst müssen wir die Hilfsfunktion $Q_a(x)$ betrachten (*Esseen*, Kap. 7, § 3). $Q_a(x)$ ist 1 für $f(x) \leqq a$ und 0 sonst, also die charakteristische

Funktion von $f(x) \leqq a$ und $q_a(t) = \int\limits_{R_m} e^{itx} Q_a(x)\, dx$, welche früher mit G bezeichnet wurde. Dann wird für $0 < \varepsilon < a$ die Funktion

$$M(x) = (\Im \varepsilon^m)^{-1} \int\limits_{R_m} Q_a(x-\xi)\, Q_\varepsilon(\xi)\, d\xi$$

betrachtet, wo $\Im$ das Volumen des Eichkörpers $f(x) \leqq 1$ ist. Nun ist für $f(x) \leqq a - \varepsilon$ und $f(\xi) \leqq \varepsilon$, $f(x-\xi) \leqq a$ und für $f(x) > a + \varepsilon$ und $f(\xi) \leqq \varepsilon$, $f(x-\xi) > a + \varepsilon - a = a$, also ist $M(x) = 1$ für $f(x) \leqq a - \varepsilon$ und 0 für $f(x) \geqq a + \varepsilon$ während für alle x, $M(x) \leqq 1$ ist. Weiters ist

$$m(t) = \int\limits_{R_m} M(x)\, e^{itx}\, dx = (\Im \varepsilon^m)^{-1} \int\limits_{R_m} e^{itx} Q_a(x)\, dx \int\limits_{R_m} e^{i\xi t} Q_\varepsilon(\xi)\, d\xi =$$
$$= (\Im\, \varepsilon^m)^{-1}\, q_a(t)\, q_\varepsilon(t).$$

Ersetzen wir $a \longrightarrow a + \frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon \longrightarrow \frac{\varepsilon}{2}$, so ist, wenn $M_1(x) = 1$ für $f(x) \leqq a$ und 0 für $f(x) \geqq a + \varepsilon$, seine Fouriertransformierte $m_1(t) = (\frac{2}{\varepsilon})^m \Im^{-1} q_{a+\frac{\varepsilon}{2}}(t)\, q_{\frac{\varepsilon}{2}}(t)$.

Ersetzen wir ebenso $a \longrightarrow a - \frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon \longrightarrow \frac{\varepsilon}{2}$, so ist, wenn $M_2(x) = 1$ für $f(x) \leqq a - \varepsilon$ und 0 für $f(x) \geqq a$, seine Fouriertransformierte $m_2(t) = (\frac{2}{\varepsilon})^m \Im^{-1} q_{a-\frac{\varepsilon}{2}}(t)\, q_{\frac{\varepsilon}{2}}(t)$. Nun ist trivialerweise $|q_a(t)| \leqq \Im a^m$ und nach I, § 5 (für $\delta = 0$), $q_a(t) = 0\,(a^{\frac{m-1}{2}} |t|^{-\frac{m+1}{2}})$.

Daraus folgt als erste Abschätzung für $m_1(t)$

$$m_1(t) = (\tfrac{2}{\varepsilon})^m \Im^{-1}\, 0\,(a^{\frac{m-1}{2}} |t|^{-\frac{m+1}{2}})\, 0\,(\varepsilon^m) = 0\,(a^{\frac{m-1}{2}} |t|^{-\frac{m+1}{2}})$$

Eine zweite Abschätzung erhalten wir so: Es ist

$$m_1(t) = (\tfrac{2}{\varepsilon})^m \Im^{-1} q_{a+\frac{\varepsilon}{2}}\, q_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{m}{m+1}}\, q_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{m+1}} =$$
$$= \varepsilon^{-m}\, 0\,(a^{\frac{m-1}{2}} |t|^{-\frac{m+1}{2}})\, (0\,(\varepsilon^{\frac{m-1}{2}} |t|^{-\frac{m+1}{2}}))^{\frac{m}{m+1}}\, (0\,(\varepsilon^m))^{\frac{m}{m+1}} =$$
$$= 0\,(a^{\frac{m-1}{2}}\, \varepsilon^{-\frac{m}{2}} |t|^{-\frac{2m+1}{2}}).$$

Dasselbe gilt natürlich auch für $m_2(t)$. Daher können wir, wenn mit *Esseen* die Bezeichnung geändert wird, sagen (Lemma 4 bei *Esseen*):

Sind a und ε zwei vorgegebene Zahlen mit $o < \varepsilon < a$, so gibt es zwei Funktionen $H(x, a, \varepsilon)$ und $H(x, a, -\varepsilon)$, so daß

$$H(x,a,\varepsilon)=\begin{cases}1\\0\end{cases}\text{wenn}\begin{cases}f(x)\leqq a,\\f(x)\geqq a+\varepsilon\end{cases} H(x,a,-\varepsilon)=\begin{cases}1\\0\end{cases}\text{wenn}\begin{cases}f(x)\leqq a-\varepsilon\\f(x)\geqq a\end{cases} \tag{43}$$

so daß $|H| \leqq 1$ und für ihre Fouriertransformierte h gilt

$$|h(t,a,\pm\varepsilon)| \leqq c_3 |a|^{\frac{m-1}{2}} |t|^{-\frac{m+1}{2}}$$

und

$$\leqq c_4 |a|^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon^{-\frac{m}{2}} |t|^{-m-\frac{1}{2}} \tag{44}$$

Es sei jetzt $\Phi = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\omega = \Phi - \frac{(2\pi)^{-\frac{m}{2}}}{6\sqrt{n}} (\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial x_m})^3 e^{-x^2}, \quad \psi = \int\limits_{f(x)\leqq a} \Phi\, d\,x$$

Dabei bedeutet das Symbol $\alpha_1^{\nu_1} \ldots \alpha_m^{\nu_m} = \int\limits_{R_m} x_1^{\nu_1} \ldots x_m^{\nu_m}\, d\,P(x)$ (vgl. *Esseen*, Kap. 6, Formel (8)). Es sei weiter $\varphi_n(t)$ die charakteristische Funktion von ${}^{(n)}x$, $P_n(E)$ die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung und (vgl. *Esseen*, Kap. 7, § 4)

$$U_n(E) = \int\limits_E \omega\, d\,x,\ \Delta_n = \varphi_n - e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{i}{6\sqrt{n}} (\alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_m t_m)^3 e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Dann gilt die fundamentale Formel (*Esseen*, Kap. 7, § 4)

$$\int\limits_{R_m} H(x,a,\pm\varepsilon)\, d\,(P_n(x) - U_n(x)) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{R_m} \Delta_n(t)\, h(t,a,\pm\varepsilon)\, d\,t.$$

Es ist noch nachzuweisen, daß $\int\limits_{f\leqq a} \omega\, d\,x = \psi$ ist. Dazu ist zu beachten, daß $K : f(x) \leqq a$ symmetrisch in Bezug auf o ist, und durch die Transformation $x \longrightarrow -x$ in sich übergeht. Daraus folgt durch einfache Rechnung, daß $\int\limits_K (\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial x_m})^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\, d\,x = 0$ ist.

Benützen wir die Eigenschaften von H, so folgt, genau wie bei *Esseen* Kap. 7, § 4 (56)

$$|\mu_n(a) - \psi(a)| \leqq \operatorname{Max}(A_1, A_2)$$

wo

$$A_1 = |\psi(a+\varepsilon) - \psi(a)| +$$

$$+ \frac{1}{6\sqrt{n}} \int_{a \leqq f \leqq a+\varepsilon} \left| \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \right| dx + \int_{R_m} |\Delta_n h| \, dt \tag{45}$$

analog A_2 wo ε durch $-\varepsilon$ zu ersetzen ist.

Wir wollen $\psi(a+\varepsilon) - \psi(a)$ abschätzen. Es ist $c_1 |x| \leqq f(x) \leqq C |x|$ also

$$\psi(a+\varepsilon) - \psi(a) = \int_{a \leqq f \leqq a+\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leqq \int_{a \leqq f \leqq a+\varepsilon} e^{-\frac{1}{2c^2} f(x)^2} dx =$$

$$= Jm \int_a^{a+\varepsilon} e^{-c_3 t^2} t^{m-1} dt \leqq c_4 \beta_4^{\frac{3}{2}} n^{-\frac{m}{m+1}}$$

wenn $\varepsilon = a \beta_4^{\frac{3}{2}} n^{-\frac{m}{m+1}}$ gewählt wird. Dabei wurde Hilfssatz 1 benützt. Analog gehen wir beim zweiten Term in (45) vor. Er läßt sich durch eine Summe von Integralen $\int_{a \leqq f \leqq a+\varepsilon} \left| \frac{\partial^3 e^{-\frac{x^2}{2}}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right| dx$ abschätzen, welche sicher

$$\leqq C_5 \int |x|^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leqq C_6 \int_{a \leqq f \leqq a+\varepsilon} f^3 e^{-c_3 f^2} \, dx \leqq C_7 \beta_4^{\frac{3}{2}} n^{-\frac{m}{m+1}}$$

Die Hauptsache, nämlich die Abschätzung des letzten Integrals, geht dann wie bei *Esseen*.

Ein Irreduzibilitätskriterium für Primärideale in kommutativen Ringen.

Von

W. Gröbner, Innsbruck.

(Eingelangt am 2. Oktober 1950.)

1.

Nach *Emmy Noether* heißt ein Ideal *irreduzibel*, wenn es nicht als Durchschnitt von zwei echten Teilern (Oberidealen) dargestellt werden kann. Ein irreduzibles Ideal in einem *Noether*schen O-Ring ist notwendig primär, aber umgekehrt kann man nur sagen, daß jedes Primideal irreduzibel ist[1], während es unter den Primäridealen auch reduzible gibt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehörendes Primärideal $\mathfrak{q}$ irreduzibel ist, besteht darin, daß zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} : \mathfrak{p}$ kein weiteres Primärideal liegt[2].

Die Bedeutung der irreduziblen Ideale liegt vor allem in der von ihnen erfüllten und für sie charakteristischen Reziprozitätsbeziehung[3]: Bedeuten $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$ Primärideale, die zum selben Primideal $\mathfrak{p}$ gehören, ist ferner $\mathfrak{q}$ irreduzibel, $\mathfrak{q}_1$ Teiler von $\mathfrak{q}$ ($\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{p}$), so gilt immer

$$\mathfrak{q} : (\mathfrak{q} : \mathfrak{q}_1) = \mathfrak{q}_1; \tag{1}$$

wir können also jedem Teiler $\mathfrak{q}_1$ des irreduziblen Primärideals $\mathfrak{q}$ umkehrbar eindeutig einen „reziproken" Teiler $\mathfrak{q}_2$ zuordnen, die sich gemäß den Gleichungen

$$\mathfrak{q} : \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2, \quad \mathfrak{q} : \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}_1 \tag{2}$$

entsprechen. Wir können auch sagen, jeder Teiler $\mathfrak{q}_1$ besitzt eine Quotientendarstellung $\mathfrak{q} : \mathfrak{q}_2$. Das wäre bei einem reduziblen Primärideal $\mathfrak{q}$ nicht mehr richtig[4].

---

[1] [9] 2. Bd., S. 36 (siehe das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit).

[2] [10] Satz 4a, S. 205.

[3] [10] Satz 7 und 7a, S. 208.

[4] *Macaulay* hat diese charakteristischen Beziehungen besonders hervorgehoben, vgl. [2], S. 33.

Diese Sätze über reziproke Teiler und Darstellbarkeit jedes Teilers als Quotienten lassen sich sinngemäß auf „reguläre" Ideale übertragen, die Durchschnitte von gegenseitig primen irreduziblen Idealen sind[5].

Die Gültigkeit dieser Reziprozitätsbeziehung ist von grundlegender Wichtigkeit in der algebraischen Geometrie, wenn man nämlich versucht, dem oft gebrauchten Symbol $A-B$, der „Differenz" zweier algebraischen Mannigfaltigkeiten, von denen die erste die zweite enthält, einen präzisen Sinn zu verleihen. Es muß dann nämlich die Identität $A-(A-B)=B$ erfüllt sein. Übersetzt man diese Gleichung in ihre idealtheoretische Gestalt, wo den Mannigfaltigkeiten A und B die Polynomideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zugeordnet sind[6], so lautet sie

$$\mathfrak{a}:(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})=\mathfrak{b}. \tag{3}$$

Diese Gleichung ist aber dann und nur dann für jeden engeren Teiler $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ richtig, wenn $\mathfrak{a}$ ein reguläres Ideal im obigen Sinne ist.

Man sieht hier, daß es sehr wichtig ist, in einzelnen Fällen rasch entscheiden zu können, ob ein vorliegendes Primärideal irreduzibel ist oder nicht. Die oben angegebene notwendige und hinreichende Bedingung für ein irreduzibles Primärideal erfordert zu ihrem Nachweis eine längere Untersuchung, die nur durchgeführt werden kann, wenn das Primärideal effektiv mit allen Einzelheiten gegeben ist. Es ist daher wünschenswert, ein Kriterium zu besitzen, welches sich auf andere, leichter feststellbare Eigenschaften stützt, auch wenn es dann keine notwendige, sondern nur eine hinreichende Bedingung für die Irreduzibilität darstellt. Ein solches einfaches Kriterium wurde von *Macaulay* für den Bereich der Polynomideale angegeben[7]; aber der Beweis, den *Macaulay* gibt, ist ziemlich schwierig und benützt das von ihm entwickelte „inverse System", so daß seine Verallgemeinerung auf allgemeinere Ringe nicht möglich scheint.

Im folgenden soll nun das von *Macaulay* stammende Kriterium für die Irreduzibilität eines Primärideals für allgemeinere Integritätsbereiche formuliert und auf einem neuen einfacheren Wege bewiesen werden.

---

[5] [10], S. 219.

[6] Bezüglich der umkehrbar eindeutigen Zuordnung der algebraischen Mannigfaltigkeiten und der Polynomideale (mit Ausnahme der T-Ideale) vgl. [12], S. 81—95.

[7] [1], S. 80; [2], Satz VIII, S. 40.

2.

Wir legen unserer Untersuchung einen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$, also einen kommutativen Ring ohne Nullteiler und mit einem Einselement zugrunde, der noch gewisse Eigenschaften besitzen soll, die jetzt genauer zu präzisieren sind. Vor allem soll in $\mathfrak{J}$ der *Noether*sche Teilerkettensatz gelten, so daß jedes Ideal eine endliche Basis besitzt. Dann lassen sich für die Primideale und Primidealketten in $\mathfrak{J}$ nach *W. Krull*[8] bereits folgende Sätze beweisen:

I. Primäridealsatz: *Der Durchschnitt aller zu einem festen Primideal gehörigen Primärideale ist stets das Nullideal* (0).

II. Hauptidealsatz: *Jedes minimale Primoberideal* $\mathfrak{p}$ *eines Hauptideals ist in* $\mathfrak{J}$ *minimal, d. h. es gibt* (*außer dem Nullideal*) *kein echtes Primunterideal von* $\mathfrak{p}$.

III. Primidealkettensatz: *Ist* $\mathfrak{p}$ *minimales Primoberideal eines Ideals* $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *mit k-gliedriger Basis, so besitzt jede mit dem Nullideal beginnende und mit* $\mathfrak{p}$ *endende Teilerkette aus Primidealen*:

$$(0) \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_j = \mathfrak{p} \tag{4}$$

höchstens $k + 1$ (*verschiedene*) *Glieder* ($j \leqq k$).

Es ist zu vermuten, daß alle Primidealketten mit denselben Endgliedern (0) und $\mathfrak{p}$, die geschlossen sind, d. h. keine Einschaltung weiterer Glieder zulassen, notwendig dieselbe Gliederzahl aufweisen müssen, jedoch scheint dies aus den bisherigen Voraussetzungen nicht zu folgen. Wir wollen diese Eigenschaft daher ausdrücklich als Postulat für $\mathfrak{J}$ fordern.

IV. *Alle geschlossenen Primidealketten zwischen zwei festen Endpunkten* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}'$ *haben die gleiche Gliederzahl*[9].

Nun sind wir in der Lage, jedem Primideal eindeutig einen „Rang" („Dimensionsdefekt") zuzuschreiben, nämlich die um 1 verminderte Anzahl der Glieder, welche eine geschlossene Primidealkette (4) aufweist; diese Zahl j ist charakteristisch für jedes Primideal[10].

---

[8] [3]; vgl. auch [4], S. 37f. und [5], S. 19ff.

[9] Vgl. [4], S. 38. Dieser Satz gilt in allen Polynomringen und in allen Restklassenringen von Polynomidealen, vgl. [12], S. 143.

[10] Besitzt jedes in $\mathfrak{J}$ maximale Primideal denselben Rang n, so sagt man, der Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ habe die Dimension n; einem Primideal des Ranges j kommt dann die Dimension $n - j$ zu.

Wir nennen ein Ideal $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ mit r-gliedriger Basis ein *Ideal der Hauptklasse* r oder kurz *Hauptklassenideal*[11], wenn es kein Primoberideal eines Ranges $< r$ besitzt. Dann haben die minimalen (isolierten) Primoberideale von $\mathfrak{a}$ sämtlich den Rang r; es ist aber nicht ausgeschlossen, daß $\mathfrak{a}$ eingebettete Primärkomponenten besitzt, die zu Primidealen eines Ranges $> r$ gehören. Ein Ideal, dessen zugehörige Primideale sämtlich denselben Rang haben, nennen wir *ungemischt*, andernfalls *gemischt*.

Wir fordern nun für unseren Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ noch die weitere Eigenschaft:

V. *Jedes Hauptklassenideal in* $\mathfrak{J}$ *ist ungemischt.*

Dieser Satz ist in jedem Polynomring gültig[12], aber im allgemeinen nicht in den Restklassenringen eines Polynomideals, sondern nur in denjenigen eines *perfekten* Polynomideals[13]. Diese Voraussetzung V ist nach derjenigen des Teilerkettensatzes die einschränkendste und folgenreichste; sie ist aber für die Gültigkeit unseres Kriteriums unerläßlich, wie schon durch Beispiele aus Polynomringen gezeigt werden kann.

Wenn wir irgendein Primideal $\mathfrak{p}$ und dessen Primärideale untersuchen wollen, so empfiehlt es sich, zum Quotientenring $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ überzugehen, der alle gebrochenen Elemente enthält, deren Nenner nicht in $\mathfrak{p}$ liegen. Das Primideal $\mathfrak{p}$ geht dabei in das wieder mit $\mathfrak{p}$ bezeichnete (einzige) maximale Primideal von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ über, und alle Primärideale von $\mathfrak{p}$ werden umkehrbar eindeutig auf die entsprechenden Primärideale in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ abgebildet. Allgemein gehen bei dieser Quotientenbildung sämtliche Primärkomponenten eines Ideals, die nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind, verloren, während die durch $\mathfrak{p}$ teilbaren voll erhalten bleiben. Wir dürfen ferner die Basis eines jeden Ideals in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ aus Elementen zusammengesetzt denken, die in $\mathfrak{J}$ liegen (d. h. nicht gebrochen sind). Dann zeigt eine leichte Überlegung, daß die Sätze I—V auch in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ gültig bleiben.

Hat das Primideal $\mathfrak{p}$ den Rang r, so wird es in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ eine Basis besitzen, die aus wenigstens r Gliedern besteht[14]. Die Anwendungen in der algebraischen Geometrie legen es nun nahe, die Primideale unseres Inte-

[11] Ein Ideal der Hauptklasse 1 ist ein Hauptideal.

[12] Vgl. [12], S. 125.

[13] Vgl. [12], S. 192, 197 ff.

[14] Mit Benützung des Satzes 12 in [10], S. 212, stellt man leicht fest, daß die Anzahl der Basiselemente jeder Basis von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, die durch Streichung überflüssiger Basiselemente nicht mehr verkürzt werden kann, notwendig dieselbe ist.

gritätsbereiches $\mathfrak{J}$ nach der folgenden Definition in „einfache" und „vielfache" Primideale einzuteilen.

Definition: *Ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *des Integritätsbereiches* $\mathfrak{J}$, *das den Rang* r *hat, heißt „einfach" oder „regulär", wenn es in* $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ *eine unverkürzbare Basis aus genau* r *Elementen besitzt; andernfalls heißt es „vielfach" oder „singulär".*

3.

Das zu beweisende Kriterium lautet so:

Satz: *In einem Integritätsbereich* $\mathfrak{J}$, *in welchem der Noethersche Teilerkettensatz und die Postulate IV und V gelten, ist jede Primärkomponente eines Hauptklassenideals, die zu einem regulären Primideal gehört, irreduzibel.*

Zum Beweise setzen wir ein beliebiges Hauptklassenideal $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ an; $\mathfrak{p}$ sei ein zugehöriges reguläres Primideal. $\mathfrak{p}$ hat gemäß V den Rang r, und da es regulär vorausgesetzt ist, gilt eine Darstellung

$$\mathfrak{p} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r) \text{ in } \mathfrak{J}_\mathfrak{p}. \tag{5}$$

Das Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ reduziert sich auf seine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente $\mathfrak{q}$, so daß

$$\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \ldots, a_r) \text{ in } \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$$

ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal darstellt. Wir werden unseren Satz daher bewiesen haben, wenn wir zeigen, daß jedes zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{q}$, welches in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ eine r-gliedrige Basis besitzt, irreduzibel ist.

Wir führen den Beweis zunächst für den speziellen Fall, daß

$$\mathfrak{q} = (\pi_1 p_1, \pi_2 p_2, \ldots, \pi_r p_r) \text{ in } \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \tag{6}$$

ist. Nach der bereits erwähnten notwendigen und hinreichenden Bedingung ist $\mathfrak{q}$ dann und nur dann irreduzibel, wenn $\mathfrak{q} : \mathfrak{p} = (\mathfrak{q}, \omega)$, d. h. $\mathfrak{q} : \mathfrak{p}$ mod $\mathfrak{q}$ ein Hauptideal (ω) ist. Es sei nun ω ein beliebiges Element aus $\mathfrak{q} : \mathfrak{p}$, das nicht in $\mathfrak{q}$ liegt. Dann liegt $\omega \pi_1$ in $\mathfrak{q}$, so daß

$$\omega \pi_1 = a_1 \pi_1 p_1 + a_2 \pi_2 p_2 + \ldots + a_r \pi_r p_r$$

mit Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ gilt. Wir können das auch so schreiben:

$$\pi_1 (\omega - a_1 p_1) \equiv 0 \quad (\pi_2 p_2, \pi_3 p_3, \ldots, \pi_r p_r).$$

Das Ideal $(\pi_2 p_2, \ldots, \pi_r p_r)$ ist wieder Hauptklassenideal, die zugehörigen Primideale haben den Rang $r-1$, und π_1 ist in keinem dieser Primideale enthalten, denn sonst wäre $\mathfrak{q}$ nicht Hauptklassenideal. Daher gilt auch

$$\omega - a_1 p_1 \equiv 0 \ (\pi_2 p_2, \pi_3 p_3, \ldots, \pi_r p_r)$$

oder $\omega \equiv a_1 p_1 (\mathfrak{q})$. Da wir ω mod $\mathfrak{q}$ beliebig abändern dürfen, können wir $\omega = a_1 p_1 \not\equiv 0 (\mathfrak{q})$ setzen. Nun folgt weiter wegen $\omega \pi_2 \equiv 0 (\mathfrak{q})$

$$\omega \pi_2 = a_1 p_1 \pi_2 = b_1 \pi_1 p_1 + b_2 \pi_2 p_2 + \ldots + b_r \pi_r p_r,$$

also auch

$$p_1 (a_1 \pi_2 - b_1 \pi_1) \equiv 0 \ (\pi_2 p_2, \ldots, \pi_r p_r).$$

Mit analogen Überlegungen folgt daraus

$$a_1 \pi_2 - b_1 \pi_1 \equiv 0 \ (\pi_2 p_2, \ldots, \pi_r p_r),$$

oder

$$a_1 \pi_2 = b_1 \pi_1 + b_2' \pi_2 p_2 + \ldots + b_r' \pi_r p_r.$$

Daraus folgert man weiter der Reihe nach

$$\pi_2 (a_1 - b_2' p_2) \equiv 0 \ (\pi_1, \pi_3 p_3, \ldots, \pi_r p_r),$$

$$a_1 - b_2' p_2 \equiv 0 \ (\pi_1, \pi_3 p_3, \ldots, \pi_r p_r),$$

$$a_1 \equiv b_1' \pi_1 + b_2' p_2 (\mathfrak{q}),$$

$$\omega = a_1 p_1 \equiv b_2' p_1 p_2 (\mathfrak{q}),$$

so daß wir $\omega = b_2' p_1 p_2$ setzen dürfen. Wenn wir nun $\omega \pi_3 \equiv 0 (\mathfrak{q})$ in derselben Weise auswerten, finden wir $\omega = c_3 p_1 p_2 p_3$ usw., bis schließlich

$$\omega = \gamma p_1 p_2 \ldots p_r \not\equiv 0 (\mathfrak{q})$$

mit einem Element $\gamma \not\equiv 0 (\mathfrak{p})$ folgt. Setzen wir daher $\omega = p_1 p_2 \ldots p_r$, so wird

$$\mathfrak{q} : \mathfrak{p} = (\mathfrak{q}, \omega),$$

d. h. das Primärideal $\mathfrak{q}$ ist irreduzibel. Insbesondere sind also alle Primärideale der Gestalt $(\pi_1^{n_1}, \pi_2^{n_2}, \ldots, \pi_r^{n_r})$ irreduzibel.

4.

Nun sei

$$\mathfrak{q} = (p_1, p_2, \ldots, p_r) \tag{7}$$

ein beliebiges zu $\mathfrak{p}$ gehörendes Primärideal mit r-gliedriger Basis; wir wollen zeigen, daß es irreduzibel ist. Wir benützen dazu das Ideal $\mathfrak{j} = (\pi_1 p_1, \pi_2 p_2, \ldots, \pi_r p_r)$; im allgemeinen wird $\mathfrak{j}$ wieder ein zu $\mathfrak{p}$ gehörendes Primärideal, und dann zufolge des eben Bewiesenen irreduzibel sein. Falls dies aber nicht von vornherein der Fall wäre, so können wir es immer leicht erreichen, indem wir die Basis $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ von $\mathfrak{p}$ einer genügend allgemeinen linearen homogenen Transformation (deren Determinante $\not\equiv 0 (\mathfrak{p})$ sein muß) unterwerfen. Da also $\mathfrak{j}$ irreduzibel

und $\mathfrak{q}$ ein Teiler von $\mathfrak{j}$ ist, so wird $\mathfrak{q}$ nach einem bekannten Satz dann und nur dann irreduzibel sein, wenn $\mathfrak{j} : \mathfrak{q} = (\mathfrak{q}, \omega)$, d. h. $\mathfrak{j} : \mathfrak{q}$ mod $\mathfrak{q}$ ein Hauptideal (ω) ist[15].

Daß dies tatsächlich zutrifft, können wir durch ganz ähnliche Überlegungen wie oben beweisen. Sei nämlich ω irgend ein Element aus $\mathfrak{j} : \mathfrak{q}$, das nicht in $\mathfrak{j}$ vorkommt. Dann ist $\omega\,\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{j}$, also

$$\omega\, p_1 = a_1 \pi_1 p_1 + a_2 \pi_2 p_2 + \ldots + a_r \pi_r p_r;$$

daraus folgt $p_1(\omega - a_1\pi_1) \equiv 0\ (\pi_2 p_2, \ldots, \pi_r p_r)$, also auch $\omega - a_1\pi_1 \equiv 0(\mathfrak{j})$, so daß wir $\omega = a_1 \pi_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{j})$ setzen dürfen. Nun folgt weiter wegen $\omega\, p_2 \equiv 0\ (\mathfrak{j})$ zunächst

$$\pi_1 (a_1 p_2 - b_1 p_1) \equiv 0\ (\pi_2 p_2, \ldots, \pi_r p_r),$$

$$a_1 p_2 - b_1 p_1 \equiv 0\ (\pi_2 p_2, \ldots, \pi_r p_r),$$

oder

$$a_1 p_2 = b_1 p_1 + b_2' \pi_2 p_2 + \ldots + b_r' \pi_r p_r\,.$$

Nun hat man

$$p_2 (a_1 - b_2' \pi_2) \equiv 0\ (p_1, \pi_3 p_3, \ldots, \pi_r p_r),$$

$$a_1 - b_2' \pi_2 \equiv 0\ (p_1, \pi_3 p_3, \ldots, \pi_r p_r),$$

oder $a_1 \equiv b_1'\, p_1 + b_2' \pi_2\ (\mathfrak{j})$, woraus $\omega = a_1 \pi_1 \equiv b_2' \pi_1 \pi_2\ (\mathfrak{j})$ folgt, so daß wir wieder $\omega = b_2' \pi_1 \pi_2 \not\equiv 0(\mathfrak{j})$ setzen dürfen. So fortfahrend erhalten wir schließlich $\omega = \gamma \pi_1 \pi_2 \ldots, \pi_r$, wo γ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{P}_\mathfrak{p}$ sein darf; setzen wir daher insbesonders $\gamma = 1$, $\omega = \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_r$, so gilt $\mathfrak{j} : \mathfrak{q} = (\mathfrak{j}, \omega)$, womit die Irreduzibilität der Primärideals $\mathfrak{q}$ und damit unser Satz vollständig bewiesen ist.

5.

Das im Satz von Nr. 3 angegebene Kriterium für die Irreduzibilität eines Primärideales ist von großer Wichtigkeit für viele Anwendungen in der algebraischen Geometrie, die hier nur angedeutet werden können. Zunächst sei darauf hingewiesen, daß die Postulate I—V in jedem Polynomring und in jedem Restklassenring eines solchen nach einem perfekten H-Ideal erfüllt sind. Ist die dem Ideal entsprechende algebraische Mannigfaltigkeit singularitätenfrei, so ist auch jedes Primideal des Restklassenringes einfach. In einem solchen Restklassenring ist also jedes Hauptklassenideal „regulär", d. h. seine Primärkomponenten

[15] Vgl. [10], Satz 9, S. 210.

sind isoliert und irreduzibel. Ist die Mannigfaltigkeit nicht singularitätenfrei, so gilt dieser Satz immer noch für alle diejenigen Hauptklassenideale, deren zugehörige Primideale einfach sind, die also keine singuläre Mannigfaltigkeit ausschneiden.

Ist endlich irgendein ungemischtes Ideal $\mathfrak{b}$ des Restklassenringes vorgelegt, das keine singulären Mannigfaltigkeiten ausschneidet, so kann man immer, und zwar auf unendlich viele Arten, ein reguläres Hauptklassenideal $\mathfrak{a}$ angeben, das denselben Rang hat und Unterideal (Vielfaches) von $\mathfrak{b}$ ist. Setzen wir dann $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, so gilt auch umgekehrt $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} : \mathfrak{c}$, so daß sich eine Darstellung von $\mathfrak{b}$ als Quotient eines Hauptklassenideals darstellen läßt. Auf diese Weise ist es in gewissen Fällen möglich, Untersuchungen, die sich nur bei Hauptklassenidealen durchführen lassen, auch auf allgemeinere ungemischte Ideale auszudehnen.

Literatur.

[1] *F. S. Macaulay*, Algebraic Theory of modular Systems, Cambridge Univ. Press 1916.

[2] *F. S. Macaulay*, Modern Algebra and polynomial Ideals, Proc. Cambridge Phil. Soc. **30** (1934), 27—46.

[3] *W. Krull*, Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen, S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. 1928, 7. Abh.

[4] *W. Krull*, Idealtheorie, Springer Berlin 1935.

[5] *W. Krull*, Allgemeine Modul-, Ring- und Idealtheorie, Enzykl. math. Wiss. **I 1, 11**, Heft 5 (1939).

[6] *W. Krull*, Theorie der Polynomideale und Eliminationstheorie, Enzykl. math. Wiss. **I 1, 12**, Heft 5 (1939).

[7] *B. L. van der Waerden*, Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz-abgeschlossenen Ringen, Math. Ann. **101** (1929), 293—308.

[8] *B. L. van der Waerden*, Zur Idealtheorie der ganz abgeschlossenen Ringe, Math. Ann. **101** (1929), 309—311.

[9] *B. L. van der Waerden*, Moderne Algebra, 2 Bde., Springer Berlin 1930—31.

[10] *W. Gröbner*, Über irreduzible Ideale in kommutativen Ringen, Math. Ann. **110** (1934), 197—222.

[11] *W. Gröbner*, Idealtheoretischer Aufbau der algebraischen Geometrie, Teubner, Leipzig, 1941.

[12] *W. Gröbner*, Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen; Springer, Wien und Innsbruck, 1949.

Eine reelle Darstellung der Hyperkegelschnitte.

Von

Fritz Hohenberg, Graz.

(Eingelangt am 16. Oktober 1950.)

Ein komplexer Punkt P der Ebene liegt auf einer einzigen reellen Geraden g . g verbindet P mit dem konjugiert komplexen Punkt $\overline{P}$. Nach *Chr. v. Staudt*[1] läßt sich P durch die elliptische Involution auf g darstellen, deren Festpunkte P und $\overline{P}$ sind. Zur Unterscheidung von P und $\overline{P}$ wird die Involution mit einem Durchlaufungssinn versehen. Diese Darstellung ist invariant gegenüber reellen Kollineationen, d. h. wenn P durch eine reelle Kollineation in P' und g in g' übergeführt wird, geht die P darstellende Involution auf g in die P' darstellende Involution auf g' über.

Kennzeichnet man die Involution auf einer eigentlichen Geraden g durch das geordnete Paar ihrer Potenzpunkte P_1 und P_2 (d. h. durch jenes Punktepaar der Involution, das symmetrisch zum Zentralpunkt liegt), so ist diese Darstellung von P durch den „Pfeil $P_1 P_2$" noch immer invariant gegenüber reellen Affinitäten[2]. Konjugiert komplexe Punkte werden durch „ergänzende" Pfeile $P_1 P_2$ und $P_2 P_1$ dargestellt.

Diese Darstellung eignet sich zur Veranschaulichung der Hyperkegelschnitte, die von *C. Segre*[3] eingeführt worden sind. Die Hyperkegelschnitte gehören zu den interessantesten Gebilden der komplexen Geometrie der Ebene. Eine lehrbuchartige Darstellung ihrer projektiven

---

[1] Beiträge zur Geometrie der Lage, Teil II, Nürnberg 1858, S. 137ff.

[2] Diese Darstellung von P ist nur unwesentlich verschieden von der Darstellung durch den Pfeil, der vom Zentralpunkt der Involution auf g zum einen Potenzpunkt führt. Diese letztere Darstellung wurde ausführlich von L. Locher-Ernst in der Ebene und im Raum untersucht (Das Imaginäre in der Geometrie, El. d. Math. IV (1949), S. 97—105, 121—128).

[3] Un nuovo campo di ricerche geometriche, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXV., 1889, S. 433ff.

und metrischen Eigenschaften findet man z. B. bei *J. L. Coolidge*[4]. Die affinen Eigenschaften hat *F. Hohenberg*[5] untersucht.

1. Reelle Darstellung der Hyperkegelschnitte.

Ein Punkt P der Ebene habe die komplexen kartesischen Koordinaten z_1 und z_2. Es sei

$$z_1 = x_1 + i\,y_1,\quad z_2 = x_2 + i\,y_2. \tag{1}$$

g sei die reelle Verbindungsgerade von P mit dem konjugiert komplexen Punkt $\overline{P}$. Dem Punkt P werden dann die Potenzpunkte $P_1\,(\xi_1,\,\eta_1)$ und $P_2\,(\xi_2,\,\eta_2)$ der elliptischen Involution auf g zugeordnet, deren Festpunkte P und $\overline{P}$ sind. Es ist

$$\xi_1 = x_1 - y_1,\quad \eta_1 = x_2 - y_2;\quad \xi_2 = x_1 + y_1,\quad \eta_2 = x_2 + y_2, \tag{2}$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(\xi_2+\xi_1),\ y_1 = \tfrac{1}{2}(\xi_2-\xi_1);\ x_2 = \tfrac{1}{2}(\eta_2+\eta_1),\ y_2 = \tfrac{1}{2}(\eta_2-\eta_1). \tag{3}$$

Wird P einer komplexen Parallelverschiebung

$$z_\nu' = z_\nu + c_\nu\quad (c_\nu = a_\nu + i\,b_\nu;\ \nu = 1, 2) \tag{4}$$

unterworfen, so erfahren P_1 und P_2 je eine reelle Parallelverschiebung.

Ein Hyperkegelschnitt K ist die Gesamtheit der komplexen Punkte der Ebene, die einer „hyperalgebraischen Gleichung 2. Grades"

$$u_{00} + (u_{01} + i\,v_{01})\,z_1 + (u_{01} - i\,v_{01})\,\bar{z}_1 + (u_{02} + i\,v_{02})\,z_2 + (u_{02} - i\,v_{02})\,\bar{z}_2 +$$
$$+ u_{11}\,z_1\,\bar{z}_1 + (u_{12} + i\,v_{12})\,z_1\,\bar{z}_2 + (u_{12} - i\,v_{12})\,\bar{z}_1\,z_2 + u_{22}\,z_2\,\bar{z}_2 = 0 \tag{5}$$

genügen, wo alle u_{kl} und v_{kl} reell sind. Es kann vorkommen, daß es überhaupt keinen (komplexen) Punkt gibt, der (5) genügt, z. B. wenn (5) $1 + z_1\,\bar{z}_1 + z_2\,\bar{z}_2 = 0$ lautet. Wir setzen aber voraus, daß K Punkte enthalte. K enthält dann i. a. ∞^3 Punkte (wie z. B. $z_1\,\bar{z}_1 + z_2\,\bar{z}_2 = 1$). Aus (5) folgt mittels (1)

$$u_{00} + 2\,u_{01}\,x_1 - 2\,v_{01}\,y_1 + 2\,u_{02}\,x_2 - 2\,v_{02}\,y_2 + u_{11}\,(x_1^2 + y_1^2) +$$
$$+ 2\,u_{12}\,(x_1\,x_2 + y_1\,y_2) + 2\,v_{12}\,(x_1\,y_2 - x_2\,y_1) + u_{22}\,(x_2^2 + y_2^2) = 0. \tag{6}$$

Wenn K reelle Punkte enthält, so sind sie die reellen Punkte des Kegelschnittes k, der sich aus (6) für $y_1 = y_2 = 0$ ergibt, nämlich

$$u_{00} + 2\,u_{01}\,x_1 + 2\,u_{02}\,x_2 + u_{11}\,x_1^2 + 2\,u_{12}\,x_1\,x_2 + u_{22}\,x_2^2 = 0. \tag{7}$$

---

[4] The Geometry of the complex domain, Oxford 1924, 5. Kap., § 2, 3, 4. Vgl. auch Enzyklopädie d. math. Wiss. III C 7, S. 971.

[5] Die linearen und quadratischen Gebilde der komplexen affinen Ebene, Sitzungsber. d. Öst. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl. IIa, 157 (1949), S. 177—236.

In (5), (6) und (7) mögen die linearen Glieder durch eine komplexe Parallelverschiebung (4) entfernt werden. Der Ursprung O ist dann der Mittelpunkt des Hyperkegelschnitts, d. h. K gestattet die Spiegelung an O. Diese Parallelverschiebung ist möglich, wenn

$$N = u_{12}^2 + v_{12}^2 - u_{11}\, u_{22} \neq 0 \tag{8}$$

ist[6]. Wir setzen in 1. bis 4. voraus, daß $N \neq 0$ sei. In 5. wird der Fall $N = 0$ behandelt.

Ferner möge das Koordinatensystem so um O gedreht werden, daß der Kegelschnitt k auf seine Hauptsachen bezogen ist. Es sei also

$$u_{01} = v_{01} = u_{02} = v_{02} = 0, \quad u_{12} = 0. \tag{5a}$$

Mittels (3) folgt dann aus (6) die Beziehung zwischen den Koordinaten von P_1 und P_2, nämlich

$$2\, u_{00} + u_{11}\,(\xi_1^2 + \xi_2^2) + 2\, v_{12}\,(\xi_1\, \eta_2 - \xi_2\, \eta_1) + u_{22}\,(\eta_1^2 + \eta_2^2) = 0. \tag{9}$$

2. Hyperkegelschnitte mit Mittelpunkt, die das Konjugium gestatten.

Gilt außer (5a) noch $v_{12} = 0$, so gestattet K die Spiegelung an jeder der beiden Achsen (gleichzeitige Vorzeichenänderung bei x_1 und y_1 oder bei x_2 und y_2). K gestattet dann auch das Konjugium (gleichzeitige Vorzeichenänderung bei y_1 und y_2) und besteht aus ∞^3 Paaren konjugiert komplexer Punkte, sein Bild besteht daher aus ∞^3 Paaren ergänzender Pfeile. Hier lautet (5), bzw. (9)[7]

$$u_{00} + u_{11}\, z_1\, \bar{z}_1 + u_{22}\, z_2\, \bar{z}_2 = 0 \tag{5'}$$

$$(u_{00} + u_{11}\, \xi_1^2 + u_{22}\, \eta_1^2) + (u_{00} + u_{11}\, \xi_2^2 + u_{22}\, \eta_2^2) = 0. \tag{9'}$$

(9′) zeigt eine involutorische Paarung der zu k homothetischen Kegelschnitte: zu jedem (reellen) Punkt P_1, der auf einem Kegelschnitt $u_{11}\, \xi_1^2 + u_{22}\, \eta_1^2 = c_1$ (c_1 fest) liegt, gehört als Ort der zugehörigen Punkte P_2 ein und derselbe Kegelschnitt $u_{11}\, \xi_2^2 + u_{22}\, \eta_2^2 = c_2$ (c_2 fest), wobei

$$2\, u_{00} + c_1 + c_2 = 0 \tag{10}$$

ist. Ist z. B. k ein Kreis, so besitzt jeder Punkt von K zwei Bildpunkte

---

[6] F. Hohenberg, l. c., S. 208. Ist $N > 0$, so schneidet K die Ferngerade nach ∞^1 Punkten, die eine Kette bilden, und heißt daher Hyperhyperbel. Ist $N = 0$, so besitzt K einen einzigen Fernpunkt (Hyperparabel). Ist $N < 0$, so besitzt K keinen Fernpunkt (Hyperellipse, für $u_{11} = u_{22}$, $u_{12} = 0$ ein Hyperkreis).

[7] Damit K wirklich ∞^3 Punkte enthält, dürfen u_{00}, u_{11} und u_{22} nicht dasselbe Vorzeichen haben. k muß also eine Ellipse oder Hyperbel sein, wenn $u_{00}\, u_{11}\, u_{22} \neq 0$.

P_1 und P_2, die bezüglich k entgegengesetzt gleiche Potenz haben. Insbesondere ist durch (10) der Kegelschnitt k sich selbst zugeordnet, d. h. zu K gehören auch alle Punkte P, deren P_1 und P_2 auf k liegen.

P_1 und P_2 müssen reell sein. Ist k eine Ellipse, so können P_1 und P_2 nach (10) nur innerhalb der Ellipse liegen, die aus k durch ähnliche Vergrößerung aus O im Verhältnis $\sqrt{2}$ hervorgeht. Analoge Beschränkungen gelten, wenn k eine Hyperbel ist.

3. Allgemeine Hyperkegelschnitte mit Mittelpunkt.

Es gelte nun wieder (5a), jedoch sei $v_{12} \neq 0$ und zunächst auch $u_{11} \neq 0$, $u_{22} \neq 0$. Dann stellt (9) bei festem $P_1(\xi_1, \eta_1)$ einen Kegelschnitt p_2 dar, dessen reelle Punkte (wenn solche vorhanden sind) den Ort der zu P_1 gehörigen Punkte P_2 bilden. p_2 hat dieselben Fernpunkte und Achsenrichtungen wie k, den Mittelpunkt

$$M_2^0 \left(\xi_2^0 = \frac{v_{12}}{u_{11}} \eta_1, \quad \eta_2^0 = -\frac{v_{12}}{u_{22}} \xi_1\right) \tag{11}$$

und die Halbachsenlängen (in der z_1- und in der z_2-Richtung)

$$\frac{W(\xi_1, \eta_1)}{\sqrt{u_{11}}} \text{ und } \frac{W(\xi_1, \eta_1)}{\sqrt{u_{22}}}, \text{ wobei } W(\xi_1, \eta_1) =$$

$$= \sqrt{\frac{(v_{12}^2 - u_{11} u_{22})(u_{11} \xi_1^2 + u_{22} \eta_1^2) - 2 u_{00} u_{11} u_{22}}{u_{11} u_{22}}}. \tag{12}$$

Ebenso besteht der Ort der zu einem Punkt $P_2(\xi_2, \eta_2)$ gehörigen Punkte P_1 aus den reellen Punkten eines Kegelschnittes p_1 . p_1 hat den Mittelpunkt

$$M_1^0 \left(\xi_1^0 = -\frac{v_{12}}{u_{11}} \eta_2, \quad \eta_1^0 = \frac{v_{12}}{u_{22}} \xi_2\right) \tag{13}$$

und dieselben Fernpunkte und Achsenrichtungen wie k. Die Halbachsenlängen sind

$$\frac{W(\xi_2, \eta_2)}{\sqrt{u_{11}}} \text{ und } \frac{W(\xi_2, \eta_2)}{\sqrt{u_{22}}}. \tag{14}$$

Zwischen P_1 und M_2^0, ebenso zwischen P_2 und M_1^0 besteht je eine Affinität, deren Festpunkte der Mittelpunkt und die Fernpunkte von k sind. Entsprechende Punkte P_1 und M_2^0, ebenso P_2 und M_1^0 liegen auf konjugierten Durchmessern von k. Aus dem zu k homothetischen

und durch P_1 (oder P_2) gehenden Kegelschnitt geht durch ähnliche Vergrößerung aus O im Verhältnis $v_{12}/\sqrt{u_{11}\,u_{22}}$ der zu k homothetische und durch M_2^0 (oder M_1^0) gehende Kegelschnitt hervor.

Wandert P_1 (oder P_2) auf einem zu k homothetischen Kegelschnitt, so sind die zugehörigen Kegelschnitte p_2 (oder p_1) kongruent. Ein solcher zu k homothetischer Kegelschnitt ist auch $W(\xi_1, \eta_1) = 0$. Enthält er reelle Punkte und ist P_1 einer dieser reellen Punkte, so zerfällt p_2 in die Geraden von M_2^0 nach den Fernpunkten von k. Ebenso, wenn P_2 auf dem (mit $W(\xi_1, \eta_1) = 0$ identischen) Kegelschnitt $W(\xi_2, \eta_2) = 0$ liegt, zerfällt p_1 in die Geraden von M_1^0 nach den Fernpunkten von k.

4. Einige Sonderfälle von Hyperkegelschnitten mit Mittelpunkt.

1. Ist $u_{12} = 0$ und $v_{12}^2 - u_{11}\,u_{22} = 0$, so ist $N = 0$ und die Parallelverschiebung, die in (5), (6) und (7) die linearen Glieder entfernt, ist nicht möglich. Was bedeutet es aber, wenn ein Hyperkegelschnitt bereits in der Form

$$u_{00} + u_{11}\,z_1\,\bar{z}_1 + i\sqrt{u_{11}\,u_{22}}\,(z_1\,\bar{z}_2 - \bar{z}_1\,z_2) + u_{22}\,z_2\,\bar{z}_2 = 0 \qquad (15)$$

vorliegt? Dann ist der Kegelschnitt $W(\xi_1, \eta_1) = 0$, bzw. $W(\xi_2, \eta_2) = 0$ die doppeltgezählte Ferngerade und alle Kegelschnitte p_1 und p_2 sind kongruent.

Durch Einsetzen in (15) bestätigt man, daß für jedes reelle φ die Gerade

$$z_2 = -i\sqrt{\frac{u_{11}}{u_{22}}}\,z_1 + \sqrt{-\frac{u_{00}}{u_{22}}}\,e^{i\varphi} \qquad (16)$$

ganz dem Hyperkegelschnitt angehört. Der Hyperkegelschnitt ist „singulär" und besteht aus den ∞^1 Geraden (16). Diese komplexen Geraden gehen durch einen Fernpunkt von k (bei Vorzeichenänderung von v_{12} durch den anderen Fernpunkt von k). Ihre reellen Punkte liegen auf k.

2. k sei ein Paar reeller oder konjugiert komplexer Geraden mit eigentlichem Schnittpunkt. Dieser Schnittpunkt werde zum Ursprung gemacht. Die z_1- und z_2-Achse seien die Winkelsymmetralen des Geradenpaares k. Dann gilt (5a) und $u_{00} = 0$. Der Ausdruck für W vereinfacht sich. Die Kegelschnitte p_1 und p_2 werden i. a. nicht zerfallen, sie gehen durch die Fernpunkte des Geradenpaares k.

3. k sei ein Paar reeller oder konjugiert komplexer paralleler Geraden. Dann sei die z_2-Achse ihre (jedenfalls reelle) Mittelparallele.

Daher ist $u_{11} \neq 0$, $u_{12} = u_{22} = 0$ und einem Punkt $P_1(\xi_1, \eta_1)$ ist die Parabel

$$(\xi_2 - \frac{v_{12}}{u_{11}} \eta_1)^2 = -\frac{2 v_{12} \xi_1}{u_{11}} (\eta_2 + \frac{u_{11} \xi_1^2 - v_{12}^2 \eta_1^2 + 2 u_{00} u_{11}}{2 u_{11} v_{12} \xi_1}) \tag{17}$$

zugeordnet, wenn $v_{12} \neq 0$ und $\xi_1 \neq 0$ ist. Ist $v_{12} \neq 0$, jedoch $\xi_1 = 0$, so entspricht $P_1(0, \eta_1)$ das Geradenpaar

$$\xi_2 = \frac{1}{u_{11}} (v_{12} \eta_1 \pm \sqrt{v_{12}^2 \eta_1^2 - 2 u_{00} u_{11}}). \tag{18}$$

Ist aber $v_{12} = 0$, so gestattet der Hyperkegelschnitt das Konjugium und im Bild sind die zur z_2-Achse symmetrischen Geradenpaare einander involutorisch zugeordnet,

$$(u_{00} + u_{11} \xi_1^2) + (u_{00} + u_{11} \xi_2^2) = 0. \tag{19}$$

4. Ist k eine eigentliche Doppelgerade, so nehmen wir sie als z_2-Achse, also $u_{11} \neq 0$, $u_{00} = u_{12} = u_{22} = 0$. Dieser Fall geht aus dem vorigen für $u_{00} = 0$ hervor. Ist außerdem $v_{12} = 0$, so besteht der Hyperkegelschnitt nur aus der doppeltgezählten Geraden $z_1 = 0$ [8].

5. Ist k die doppeltgezählte Ferngerade, so enthält K jeden reellen Fernpunkt, ist also eine spezielle Hyperhyperbel. (9) lautet hier

$$u_{00} + v_{12} (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) = 0. \tag{20}$$

Dies zeigt, daß für jeden Punkt P von K das Dreieck $O P_1 P_2$ einen konstanten Flächeninhalt hat[9].

5. Hyperparabeln.

Die Abbildung der Hyperparabeln ($N = 0$) ist ziemlich kompliziert. Wir betrachten daher hier nur jene Hyperparabeln, die das Konjugium gestatten. Bei ihnen ist $v_{01} = v_{02} = v_{12} = 0$. Ihre reellen Punkte liegen daher auf einer Parabel k. Erteilt man k die Gleichung

[8] Der singuläre Hyperkegelschnitt (15) besteht aus den ∞^1 Geraden (16), ohne daß sich seine Gleichung aufspalten läßt. Im Sonderfall (4) dagegen zerfällt die Gleichung des Hyperkegelschnitts in $z_1 = 0$ und $\bar{z}_1 = 0$. Ein Hyperkegelschnitt kann nur in eine doppeltgezählte reelle oder komplexe Gerade zerfallen. Siehe F. Hohenberg, l. c., S. 209.

[9] Von L. Eckhart (Konstruktive Abbildungsverfahren, Wien, Springer 1926, S. 63) stammt eine Abbildung der Geraden eines linearen Strahlkomplexes auf die orientierten Punktepaare der Ebene, die zusammen mit dem Spurpunkt der Achse des Strahlkomplexes Dreiecke konstanten Flächeninhaltes bilden. Dies führt auf eine Abbildung der komplexen Ebene auf den Strahlraum, bei der den speziellen Hyperkegelschnitten (20) die linearen Strahlkomplexe entsprechen. Den allgemeinen Hyperkegelschnitten entsprechen dabei Hirstsche Strahlkomplexe, siehe F. Hohenberg, l. c., S. 229ff.

$$2\,u_{02}\,x_2 + u_{11}\,x_1^2 = 0, \tag{21}$$

so folgt durch Vergleich mit (7) $u_{00} = u_{01} = u_{12} = u_{22} = 0$. Die Hyperparabel lautet

$$u_{02}\,(z_2 + \bar{z}_2) + u_{11}\,z_1\,\bar{z}_1 = 0 \tag{22}$$

und sie wird durch

$$(2\,u_{02}\,\eta_1 + u_{11}\,\xi_1^2) + (2\,u_{02}\,\eta_2 + u_{11}\,\xi_2^2) = 0 \tag{23}$$

abgebildet. Verschiebt man daher die Parabel k in ihrer Achsenrichtung um zwei entgegengesetzt gleiche Strecken, so entstehen zwei Parabeln, und jeder komplexe Punkt P, dessen P_1 auf der einen und dessen P_2 auf der anderen dieser beiden Parabeln liegt, gehört der Hyperparabel an.

Die verschiedenen Reziproken einer unendlichen Matrix.

Von

Gottfried Köthe, Mainz.

(Eingelangt am 18. Oktober 1950.)

Herr *H. S. Allen* machte mich kürzlich auf die folgende Frage aufmerksam: λ und μ seien zwei vollkommene Räume, $\Sigma(\lambda)$ und $\Sigma(\mu)$ die zugehörigen Matrizenringe der linearen stetigen Abbildungen von λ bzw. μ in sich. Es sei $\mathfrak{A}$ eine Matrix, die sowohl in $\Sigma(\lambda)$ wie in $\Sigma(\mu)$ liegt und in $\Sigma(\lambda)$ die beiderseitige Reziproke $\mathfrak{B}$, in $\Sigma(\mu)$ die beiderseitige Reziproke $\mathfrak{C}$ besitzt. Ist unter diesen Voraussetzungen stets $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$?

Es ist das Ziel der vorliegenden Note, diese Frage zu klären[1].

1. Mit den beiden vollkommenen Räumen λ und μ ist ihr Durchschnitt $\lambda \cap \mu$ gegeben, der wieder ein vollkommener Raum ist, und ihre lineare Hülle $\lambda \cup \mu$, die aus allen Vektoren $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ besteht, $\mathfrak{x} \in \lambda$, $\mathfrak{y} \in \mu$.

$\lambda \cup \mu$ ist im allgemeinen kein vollkommener Raum. Die vollkommene Hülle $(\lambda \cup \mu)^{**}$ von $\lambda \cup \mu$ ist der duale Raum zu $(\lambda \cup \mu)^* = \lambda^* \cap \mu^*$. Von *O. Toeplitz* stammt das folgende Beispiel: Die beiden zueinander dualen Räume[2] $\varphi\,\omega$ und $\omega\,\varphi$ haben den Durchschnitt φ, also ist $(\varphi\,\omega \cup \omega\,\varphi)^{**} = \varphi^* = \omega$, die lineare Hülle $\varphi\,\omega \cup \omega\,\varphi$ ist jedoch, wie sofort zu sehen, ein echter Teilraum von ω.

2. Daß eine Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ eine zweiseitige Reziproke $\mathfrak{B}$ in $\Sigma(\lambda)$ besitzt, ist damit gleichbedeutend[3], daß sie einen Isomorphismus

---

[1] Es werden die Grundbegriffe der Theorie der vollkommenen Räume, wie sie in der Arbeit KT (G. *Köthe* u. O. *Toeplitz*, Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen, J. reine angew. Math. *171* (1934), 193—226) auseinandergesetzt sind, vorausgesetzt.

Eine „Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume" mit etwas abweichender Terminologie ist in den Math. Nachrichten, Berlin, 4 (1951), 70—80, erschienen.

[2] Sie sind z. B. im § 4 von G. *Köthe*, Die Teilräume eines linearen Koordinatenraumes, Math. Ann. Berlin *114* (1937), 99—125, definiert.

[3] Vgl. KT § 8. Dort ist statt „Isomorphie" die weniger passende Bezeichnung „Homöomorphie" gebraucht. Es sei bemerkt, daß $\mathfrak{A}$ darüber hinaus eine im Sinn der schwachen Topologie umkehrbar stetige Abbildung ist, doch werden wir davon keinen Gebrauch machen.

von λ auf sich erzeugt, d. h. eine eineindeutige, in beiden Richtungen im Sinn der schwachen Konvergenz von Folgen stetige Abbildung von λ.

Erzeugt $\mathfrak{A}$ einen Isomorphismus von λ auf sich, so erzeugt die transponierte Matrix $\mathfrak{A}'$ einen Isomorphismus von λ^* auf sich[4].

3. Ist λ ein Teilraum von μ, so folgt aus der Existenz der beiderseitigen Reziproken $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ in $\Sigma(\lambda)$ und $\Sigma(\mu)$ ihre Identität (Allen).

Beweis. $\mathfrak{A}$ stellt einen Isomorphismus A_1 von λ auf sich und einen Isomorphismus A_2 von μ auf sich dar, wobei A_2 eine Fortsetzung der Abbildung A_1 ist. Die Matrix $\mathfrak{C}$ erzeugt die Abbildung A_2^{-1}, die als Fortsetzung von A_1^{-1} ebenfalls den Raum λ auf sich abbildet. Also liegt $\mathfrak{C}$ auch in $\Sigma(\lambda)$, ist aber wie $\mathfrak{B}$ zweiseitige Reziproke zu $\mathfrak{A}$ in $\Sigma(\lambda)$. Da es in $\Sigma(\lambda)$ nur eine zweiseitige Reziproke zu $\mathfrak{A}$ gibt, ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$.

4. Wir bringen nun ein Beispiel, das zeigt, daß im allgemeinen Fall sehr wohl $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ verschieden sein können, daß also die zu Beginn der Note formulierte Frage negativ zu beantworten ist.

Wir nehmen als vollkommene Räume den halbfiniten Raum $\psi = \varphi + \omega$ und seinen dualen Raum $\psi^* = \omega + \varphi$. Die Elemente von ψ sind die Vektoren $\xi = \{\ldots, x_{-2}, x_{-1}; x_1, x_2, \ldots\}$, die nur endlichviele nichtverschwindende Koordinaten mit negativen Indizes besitzen, die Elemente von ψ^* haben entsprechend nur endlichviele nichtverschwindende Koordinaten mit positiven Indizes, also ist $\psi \cap \psi^*$ bis auf die Anordnung der Koordinaten gleich φ, dem Raum der finiten Vektoren.

Ordnen wir für $i = \pm 1, \pm 2, \ldots$ dem Vektor e_i den Vektor $e_i + e_{i+1}$ zu, so wird diese Zuordnung durch die Matrix

$$\mathfrak{A} = \left\{\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & 1 & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \cdot & 0 & 0 & 1 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \end{array}\right\}$$

dargestellt. $\mathfrak{A}$ ergibt einen Isomorphismus von ψ auf sich, bei dem e_i das Bild von $b_i = e_i - e_{i+1} + e_{i+2} - \ldots$ ist, und einen Isomorphismus von ψ^* auf sich, bei dem e_i das Bild von $c_i = e_{i-1} - e_{i-2} + e_{i-3} - \ldots$ ist. $\mathfrak{A}$ hat also in ψ, bzw. ψ^* die zwei verschiedenen beiderseitigen Reziproken

[4] Vgl. KT § 8, Satz 5.

$$\mathfrak{B} = \left\{\begin{array}{cccc|ccc} . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline . & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ . & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ . & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \end{array}\right\} \text{ bzw. } \mathfrak{C} = \left\{\begin{array}{ccc|ccc} . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ . & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ . & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \end{array}\right\}.$$

5. Damit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ identisch sind, muß im allgemeinen Fall also noch eine weitere Voraussetzung gemacht werden. Es ist nicht schwer, eine solche Bedingung aufzufinden.

Liegt $\mathfrak{A}$ in $\Sigma(\lambda)$ und $\Sigma(\mu)$, so führt $\mathfrak{A}$ auch $\lambda \cap \mu$ in sich über, also $\mathfrak{A} \in \Sigma(\lambda \cap \mu)$. $\mathfrak{A}$ ist aber auch auf jeden Vektor $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$, $\mathfrak{x} \in \lambda$, $\mathfrak{y} \in \mu$, anwendbar und führt ihn wieder in einen Vektor aus $\lambda \cup \mu$ über, d. h. $\mathfrak{A} \in \Sigma(\lambda \cup \mu)$.

Es gilt nun:

Bildet $\mathfrak{A}$ die vollkommenen Räume λ und μ isomorph auf sich ab, so sind die Reziproken $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ dann und nur dann identisch, wenn $\mathfrak{A}(\lambda \cap \mu) = \lambda \cap \mu$ ist.

a) Ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so liegt $\mathfrak{B}$ in $\Sigma(\lambda \cap \mu)$, also ist $\mathfrak{A}$ eine Matrix aus $\Sigma(\lambda \cap \mu)$ mit der zweiseitigen Reziproken $\mathfrak{B} \in \Sigma(\lambda \cap \mu)$, stellt also nach *2* einen Isomorphismus von $\lambda \cap \mu$ auf $\lambda \cap \mu$ dar.

b) Ist umgekehrt $\mathfrak{A}(\lambda \cap \mu) = \lambda \cap \mu$, so ist auch $\mathfrak{B}(\lambda \cap \mu) = \lambda \cap \mu$, also $\mathfrak{B} \in \Sigma(\lambda \cap \mu)$. $\mathfrak{B}$ ist also auch die zweiseitige Reziproke von $\mathfrak{A}$ in $\Sigma(\lambda \cap \mu)$. Dasselbe gilt von $\mathfrak{C}$, also $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$.

Wir bemerken ferner: Ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so hat nach *2* $\mathfrak{A}'$ in $\Sigma(\lambda^*)$ und $\Sigma(\mu^*)$ ebenfalls gleiche Reziproken, also ist $\mathfrak{A}'$ nach a) auch ein Isomorphismus von $\lambda^* \cap \mu^*$ auf sich, also nach *2* $\mathfrak{A}$ ein Isomorphismus von $(\lambda^* \cap \mu^*)^* = (\lambda \cup \mu)^{**}$ auf sich, $\mathfrak{A}$ hat also nach *3* auch in $\Sigma((\lambda \cup \mu)^{**})$ die beiderseitige Reziproke $\mathfrak{B}$.

Man überzeugt sich leicht davon, daß in dem in *4* gegebenen Beispiel tatsächlich $\mathfrak{A}\varphi$ ein echter Teilraum von φ ist.

6. Die angegebene Bedingung $\mathfrak{A}(\lambda \cap \mu) = \lambda \cap \mu$ läßt sich noch abschwächen zu der Bedingung, daß $\mathfrak{A}(\lambda \cap \mu)$ dicht in $\lambda \cap \mu$ ist im Sinn der schwachen Topologie, d. h. daß die schwach abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{A}(\lambda \cap \mu)$ gleich $\lambda \cap \mu$ ist[5].

[5] Vgl. dazu und zum Folgenden *G. Köthe*, Lösbarkeitsbedingungen für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. J. reine angew. Math. *178* (1938), 193—213, vor allem die §§ 5 und 6.

Ist nämlich $\mathfrak{A}(\lambda \cap \mu)$ echter Teilraum von $\lambda \cap \mu$, so ist nach 5 $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{C}$, also auch $\mathfrak{B}' \neq \mathfrak{C}'$ und daher, wieder nach 5, auch $\mathfrak{A}'(\lambda^* \cap \mu^*)$ echter Teilraum von $\lambda^* \cap \mu^*$. Ist also $\mathfrak{w}$ ein Element aus $\lambda^* \cap \mu^* - \mathfrak{A}'(\lambda^* \cap \mu^*)$, so ist $\mathfrak{w}$ Bild eines $\mathfrak{u}_1 \in \lambda^* - \lambda^* \cap \mu^*$, weil $\mathfrak{A}'$ λ^* isomorph auf sich abbildet, ebenso Bild eines $\mathfrak{u}_2 \in \mu^* - \lambda^* \cap \mu^*$. Dann ist aber $\mathfrak{A}'(\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2) = \mathfrak{o}$, die Gleichung $\mathfrak{A}'\mathfrak{u} = \mathfrak{o}$ ist also durch ein $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{o}$ aus $\lambda^* \cup \mu^*$ und damit aus $(\lambda \cap \mu)^*$ lösbar. Ein solches $\mathfrak{u}$ gehört aber zum Orthogonalraum von $\mathfrak{A}(\lambda \cap \mu)$ in $(\lambda \cap \mu)^*$, also ist auch die schwach abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{A}(\lambda \cap \mu)$ orthogonal zu $\mathfrak{u}$, also echter Teilraum von $\lambda \cap \mu$.

Wir fassen unsere Resultate zusammen in dem

Satz. λ *und* μ *seien zwei vollkommene Räume,* $\mathfrak{A}$ *sei eine Matrix, die sowohl in* $\Sigma(\lambda)$ *wie in* $\Sigma(\mu)$ *liegt und dort die beiderseitigen Reziproken* $\mathfrak{B}$, *bzw.* $\mathfrak{C}$ *hat. Dann und nur dann ist* $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, *wenn* $\mathfrak{A}(\lambda \cap \mu)$ *schwach dicht in* $\lambda \cap \mu$ *ist.*

Ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, *so liegt* $\mathfrak{A}$ *auch in* $\Sigma(\lambda \cap \mu)$ *und* $((\lambda \cup \mu)^{**})$ *und hat dort ebenfalls die beiderseitige Reziproke* $\mathfrak{B}$.

Der multiplikative Aufbau der Polynome in der unendlichen Ordnungszahl ω.

Von

Alexander Aigner, Graz.

(Eingelangt am 27. November 1950.)

Im Bereich der Ordnungszahlen, der *Cantor*schen Zählreihe, gelten trotz mannigfacher Schwierigkeiten in der Potenzbildung, mit denen sich namentlich *F. Hausdorff* befaßt hat, andrerseits wieder einfache Rechengesetze, wie der Euklidische Algorithmus (siehe etwa *Hausdorff*, Mengenlehre, 1. Aufl., 1914, S. 108ff.). Wir wollen nun den genauen multiplikativen Aufbau bei Grundlage einer *endlichen* Zerlegung für einen Anfangsbereich der Ordnungszahlen aufzeigen, und zwar für den Bereich der Polynome in ω, d. i. der Ordnungszahlen, welche der Zahl ω^ω vorangehen (ω ist wie üblich der Typ der abgezählten unendlichen Menge). Es wird sich zeigen, daß dieser Aufbau trotz Nichtkommutativität der Multiplikation und sogar der Addition überraschend einfach ist.

Dabei definieren wir ein solches Polynom als *reduzibel*, wenn es in zwei von ihm selbst verschiedene Faktoren zerfällt; speziell auch schon dann, wenn ein Faktor eine natürliche Zahl, also eine „Konstante" ist. Wir wollen die endlichen Zahlen als gleichberechtigte Bausteine unseres Bereiches ansehen; unter ihnen gilt dann die — hier nicht weiter interessierende — natürliche Primfaktorenzerlegung.

Die irreduziblen Polynome sind dann gewissermaßen „unendliche Primzahlen". — ω selbst ist trotz seiner Zerlegungen in $n \cdot \omega$ irreduzibel, weil bei jeder endlichen Zerlegung ein Faktor ω bleibt.

Wir bezeichnen zur Abkürzung ein solches Polynom k-ten Grades mit P_k

$$\omega^k \cdot a_k + \omega^{k-1} \cdot a_{k-1} + \ldots + \omega \cdot a_1 + a_0 = P_k$$

(die a nicht-negativ ganz, $a_k > 0$).

Nun ergibt so ein Polynom rechts mit ω multipliziert

$$P_k \cdot \omega = \omega^{k+1} \tag{1}$$

einfach die Potenz von ω nächsthöheren Grades (für $k = 0$ die Tatsache $n \cdot \omega = \omega$); allgemein daher

$$P_k \cdot \omega^r = \omega^{k+r} \tag{1a}$$

während bei ω^r als linkem Faktor auf Grund des einseitigen distributiven Gesetzes

$$\omega^r \cdot P_k = \omega^{k+r} a_k + \ldots + \omega^r a_0 \tag{2}$$

ein Polynom ohne niedrigere Potenzen als die r-te resultiert.

Nähere Zwischenrechnungen etwa nach *G. Hessenberg*, Grundbegriffe der Mengenlehre (1906), § 64—68.

Ebenso sieht man, daß sich bei der Multiplikation eines Polynoms mit einer endlichen Zahl n rechts

$$P_k \cdot n = \omega^k a_k \cdot n + \omega^{k-1} a_{k-1} + \ldots + a_0 \tag{3}$$

lediglich das höchste Glied ver-n-facht. Bei Linksmultiplikation mit n wird wegen $n\,\omega = \omega$ nach

$$n \cdot P_k = \omega^k a_k + \ldots + \omega a_1 + n a_0 \tag{4}$$

nur das letzte Glied ver-n-facht.

Unter Benützung der Formeln (1) bis (4) ergibt eine einfache Rechnung den Satz:

$$P_r \cdot P_s' = P_{r+s}''$$

In Worten: *Das Produkt zweier Polynome hat die Summe der Gradzahlen.* Ganz wie bei den Polynomen in einer Unbestimmten $P(x)$.

Auf Grund von (1) läßt sich jeder an beliebiger Stelle angesetzte Faktor ω stets an den Anfang bringen. Der restliche Teil ist dann ein vom Faktor ω freies Polynom, d. h. mit $a_0 \neq 0$. Mit solchen Polynomen werden wir uns demnach im folgenden befassen. Hier gilt wieder wie im Bereich der gewöhnlichen Polynome der Satz:

Das Produkt zweier Polynome mit nichtverschwindendem „Absolutglied" ist wieder ein solches.

Nach den Rechenformeln (1) bis (4) leicht zu verifizieren; das Produkt gleicht im Absolutglied dem ersten Faktor.

Nach (3) und (4) gilt ferner die Identität:

$$P_k = \omega^k a_k + \ldots + a_0 = a_0 (\omega^k + \omega^{k-1} a_{k-1} + \ldots + \omega a_1 + 1) a_k \tag{5}$$

Es lassen sich somit aus jedem Polynom die Randkoeffizienten herausheben (a_0 links und a_k rechts), so daß wir auf ein Polynom mit $a_k = a_0 = 1$ kommen, welches (beiderseits) *normiert* heißen möge. Analog links oder rechts normiert.

Wie man findet, ist das Produkt zweier normierter Polynome wieder normiert. Als irreduzibel kommen also (außer ω) nur beiderseitig normierte Polynome in Betracht. Mit ihnen wollen wir uns daher näher befassen. Aus einem solchen läßt sich, den Beziehungen (3) und (4) zufolge, weder links noch rechts ein Zahlenfaktor abspalten.

Beginnen wir mit dem Linearpolynom. Da gibt es nur ein einziges normiertes, $\omega + 1$, und dieses ist offensichtlich auch irreduzibel. $\omega + 1$ ist neben ω auch das einzige irreduzible Linearpolynom. Für das allgemeine Linearpolynom $\omega\, a + b$ gilt die Zerlegung

$$\omega\, a + b = b\,(\omega + 1)\, a \tag{6}$$

Multiplizieren wir nun ein beliebiges Polynom rechts mit $\omega + 1$

$$P_k \,.\, (\omega + 1) = \omega^{k+1} + P_k = \omega^{k+1} + \omega^k\, a_k + \ldots + a_0 \tag{7}$$

so entsteht immer ein links normiertes Polynom, worin außerdem der zweite Koeffizient (hier a_k) $\neq 0$ ist. Analog führt die Linksmultiplikation

$$(\omega + 1) \,.\, P_k = \omega^{k+1}\, a_k + \ldots + \omega\, a_0 + 1 \tag{8}$$

zu einem rechts normierten Polynom, wo außerdem der zweite Koeffizient von rechts (hier a_0) $\neq 0$ ist. Andere Polynome sind keine (Rechts-, bzw. Links-) Produkte mit $\omega + 1$. Im besonderen läßt sich gerade dann, wenn eine endliche Zahl heraustritt, $\omega + 1$ nicht abspalten. Die Formeln (7) und (8) zeigen aber auch, daß sich aus einem beliebigen Polynom der betreffenden Eigenschaft immer der Faktor $\omega + 1$ herausheben läßt. Die für Abspaltung von $\omega + 1$ notwendige Bauart (erster Koeffizient 1, zweiter $\neq 0$) ist auch hinreichend.

Danach hat das allgemeine beiderseits normierte quadratische Polynom mit nichtverschwindendem Mittelkoeffizienten die Zerlegung

$$\omega^2 + \omega \,.\, a + 1 = (\omega + 1)\, a\, (\omega + 1) \quad (a \neq 0)$$

Und wir sehen: das einzige irreduzible quadratische Polynom ist $\omega^2 + 1$.

Im allgemeinen haben wir noch die beiderseits normierten Polynome, bei denen zweites und zweitletztes Glied fehlt, zu untersuchen. Also $a_k = a_0 = 1$, $a_{k-1} = a_1 = 0$. Es sei nun nach $a_k = 1$ der nächste nichtverschwindende Koeffizient a_{k-r}. Dann läßt sich aus dem Polynom rechts genau der Faktor $\omega^r + 1$ herausheben. Denn es gilt

$$\omega^k + P_{k-r} = P_{k-r} \,.\, (\omega^r + 1) \tag{9}$$

mit dem allgemeinen Polynom $(k - r)$-ten Grades. Ebenso läßt sich

$\omega^r + 1$ links herausheben, wenn nach $a_0 = 1$ der nächste nichtverschwindende Koeffizient von rechts a_r ist.

$$(\omega^k + \ldots + \omega^r a_r + 1) = (\omega^r + 1) \cdot (\omega^{k-r} + \omega^{k-r-1} a_{k-r-1} + \ldots + a_r) \tag{10}$$

mit einem allgemeinen gebauten Quotienten. Und weil der Quotient allgemeiner Natur ist, so ist diese für die Abspaltung von $\omega^r + 1$ hinreichende Bauart auch dazu notwendig.

Daraus ersieht man, daß ein anderer Faktor $\omega^s + 1$ $(s \neq r)$ sich nicht herausheben läßt. Aus einem normierten Polynom läßt sich (auf derselben Seite) immer einer und nur einer der Faktoren $\omega + 1$, $\omega^2 + 1$, $\omega^3 + 1$, ... herausheben. Und somit ergibt sich:

Die Polynome der Gestalt $\omega^k + 1$ *sind alle irreduzibel*; *sie sind aber auch die einzigen irreduziblen Polynome* (*außer* ω). Es gibt von jedem Grad k ein einziges irreduzibles Polynom: $\omega^k + 1$.

Damit übersehen wir nun vollständig den multiplikativen Aufbau eines beliebigen Polynoms. Je nach den Lücken treten die Faktoren $\omega^r + 1$ heraus, dazwischen erscheinen als endliche Zahlenfaktoren die Koeffizienten des Polynoms; und zwar alles in umgekehrter Reihe. So ist z. B.

$$\omega^8 \cdot 3 + \omega^7 \cdot 4 + \omega^6 \cdot 2 + \omega^3 \cdot 6 + \omega + 5 =$$
$$= 5\,(\omega + 1)\,(\omega^2 + 1)\,6\,(\omega^3 + 1)\,2\,(\omega + 1)\,4\,(\omega + 1)\,3$$

Die Zerlegung ist auch (wenn man von der Willkür beim Faktor ω absieht) immer *eindeutig*.

Nun ergibt sich auch leicht, wie die (endlichen) Potenzen eines Linearpolynoms $\omega \cdot a + b$ aussehen. Nach $\omega\, a + b = b\,(\omega + 1)\, a$ wird

$$(\omega\, a + b)^n = b\,(\omega + 1)\, a\, b\,(\omega + 1)\, a\, b\,(\omega + 1)\, a\, b \ldots a\, b\,(\omega + 1)\, a =$$
$$= \omega^n \cdot a + \omega^{n-1} \cdot a\, b + \ldots + \omega \cdot a\, b + b$$

eine sehr einfache leicht erkenntliche Gestalt. $(a, b \neq 0)$. Speziell wird

$$(\omega + 1)^n = \omega^n + \omega^{n-1} + \ldots + \omega^2 + \omega + 1.$$

Zusatz während der Korrektur: Eine Verallgemeinerung auf beliebige Ordnungszahlen erscheint in der Fortsetzung dieser Arbeit.

Über Einheiten von algebraischen Zahlkörpern.

Von

Peter Dénes, Budapest.

(Eingelangt am 30. November 1950.)

K bezeichne einen algebraischen Zahlkörper vom Grade M und k ist sein Unterkörper vom m-ten Grade. Ein System von Grundeinheiten besteht in K aus R, in k aus r Einheiten. Ferner bedeutet S eine Substitution, mittels welcher die Zahlen von K in relativ konjugierte Zahlen in bezug auf k transformiert werden und die also diejenigen Zahlen von K, welche auch in k liegen, unverändert läßt.

Satz **1.** Ist $R = r$, so ist die symbolische $(1 - S)$-te Potenz einer jeden Einheit von K eine Einheitswurzel. Ist K ein relativ-Galois'scher Körper in bezug auf k, so liegt diese Einheitswurzel im Körper K.

Beweis. Es sei $\eta_1, \ldots, \eta_r$ ein System von Grundeinheiten in k. Diese Zahlen sind auch in K Einheiten und da ihre Determinante von Null verschieden ist, sind sie unabhängige Einheiten in K. Zufolge $R = r$ folgt, daß eine beliebige Einheit H in K durch das folgende Potenzprodukt ausgedrückt werden kann[1]:

$$H^G = \eta_1^{g_1} \ldots \eta_r^{g_r}, \tag{1}$$

wo $g_1, \ldots, g_r, G$ ganze rationale Zahlen sind. Die durch die Substitution S entspringende konjugierte Gleichung von (1) ist

$$H^{SG} = \eta_1^{g_1} \ldots \eta_r^{g_r},$$

woraus

$$H^{(1-S)G} = 1,$$

beziehungsweise

$$H^{1-S} = \varrho \tag{2}$$

folgt, in welcher ϱ eine Einheitswurzel ist, für welche

---

[1] *D. Hilbert*: Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, 1897, S. 222.

$$\varrho^G = 1$$

gilt.

Ist K ein relativ-Galois'scher Körper in bezug auf k, so liegt die symbolische $(1 - S)$-te Potenz jeder Zahl von K in K selbst, gehört also wegen (2) die Einheitswurzel ϱ zum Körper K und ist damit der Beweis in allen Einzelheiten erbracht.

Ein Oberkörper K und ein Unterkörper k, deren Grundeinheitssysteme aus der gleichen Anzahl von Grundeinheiten bestehen, hängen z. B. in der Weise zusammen, daß eine Anzahl der konjugierten imaginären Körperpaare von K durch konjugierte reelle Körper in k ersetzt werden.

Es sei R_1 die Anzahl der konjugierten reellen Körper, $2R_2$ die Anzahl der konjugierten imaginären Körper in K, dann ist[2]

$$R = R_1 + R_2 - 1.$$

In k seien r_1 konjugierte reelle Körper und $2\,r_2$ konjugierte imaginäre Körper vorhanden. Gemäß Definition ist

$$r_1 = R_1 + R_2'$$
$$2\,r_2 = 2\,R_2 - 2\,R_2',$$

wo R_2' die Anzahl jener konjugierten imaginären Körperpaare bezeichnet, welche in k durch reelle konjugierte Körper ersetzt sind. Hieraus folgt

$$r = r_1 + r_2 - 1 = R.$$

Satz 2. Das Quadrat einer Einheit des Galois'schen Zahlkörpers K, welcher einen reellen Unterkörper vom Grade $M/2$ hat, ist das Produkt einer reellen Einheit und einer in K vorkommenden Einheitswurzel.

Ist der Körper K reell, so ist der Satz trivial. Im Falle, daß K auch komplexe Zahlen enthält, bezeichnen wir mit k den reellen Unterkörper von K; dann ist $r_2 = 0$. Der Relativgrad von K in bezug auf k ist 2. Da laut obigen Überlegungen $r = R$ ist, gilt nach Satz 1 für eine beliebige Einheit H von K

$$H^{1-S} = \varrho,$$

wo ϱ eine Einheitswurzel und S diejenige Substitution ist, welche die komplexen Zahlen von K in ihre konjugiert komplexen überführt.

[2] *D. Hilbert*, loc. cit., S. 214.

Andererseits ist die Relativnorm von H in bezug auf k eine Einheit η von k:

$$H^{1+S} = \eta$$

und demzufolge

$$H^2 = \varrho\, \eta. \tag{3}$$

Da H^2 und η Einheiten in K sind, muß wegen (3) auch ϱ dem Körper K angehören.

Satz 3. Enthält der Galois'sche Zahlkörper K, welcher einen reellen Unterkörper vom Grade $M/2$ hat, nur Einheitswurzeln von ungeradem Grade, so ist jede Einheit des Körpers K das Produkt einer reellen, bzw. rein imaginären Einheit mit einer in K vorkommenden Einheitswurzel.

Ist nämlich in (3) ϱ eine Einheitswurzel von ungeradem q-ten Grade, so ist

$$\varrho = \varrho'^2$$

wo ϱ' auch eine Einheitswurzel vom q-ten Grade ist.

Über ein spezielles Dreiecksnetz aus Kegelschnitten.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 7. Dezember 1950.)

Das allgemeinste *Dreiecksnetz aus Geraden* wird nach dem bekannten Satz von H. Graf und R. Sauer von den Tangenten einer beliebigen *Kurve dritter Klasse* erzeugt[1]. Diese darf auch zerfallen, so daß sich insbesondere auch die Strahlen dreier beliebiger *Büschel* zu einem Dreiecksnetz anordnen lassen.

Im Gegensatz zu diesem restlos geklärten Sachverhalt ist die Frage nach den Dreiecksnetzen, die sich aus *Kegelschnitten* (insbesondere *Kreisen*) aufbauen, keineswegs in voller Allgemeinheit gelöst. Den zahlreichen bekannt gewordenen Beispielen[2], die zum Großteil mittels quadratischer Transformationen aus geradlinigen Dreiecksnetzen abgeleitet wurden, wird in der vorliegenden Note ein weiteres Beispiel hinzugefügt, das auf der Verwendung einer *kubischen Transformation* beruht.

1.

Seien

$$a_i \equiv \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_j, \quad b_i \equiv \sum_{j=1}^{3} b_{ij}\, x_j \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

[1] Vgl. *W. Blaschke-G. Bol*: Geometrie der Gewebe (Berlin 1938), 24; Originalbeweis: *H. Graf-R. Sauer*, Sitzungsber. bayer. Ak. Wiss. 1924; vereinfachte Darstellung von *W. Blaschke*: Tôhoku Math. J. 37 (1933).

[2] Erwähnt seien etwa: *R. Sauer-O. Baier*, Jahresber. d. DMV. 43 (1934); *W. Schmid*, Mh. Math. Phys. 40 (1933), 45 (1936), 47 (1938), Čas. mat. fys. **66** (1937); *K. Strubecker*, Mh. Math. Phys. 39 (1932); *O. Volk*, Sitzungsber. bayer. Ak. Wiss. 1929; *W. Wunderlich*, Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien, 147 (1938).

Weitere nichttriviale Kegelschnitts-Dreiecksnetze ließen sich beispielsweise auch mittels Projektion einer *Dupinschen Zyklide* (insbesondere der Torusfläche) gewinnen, da auf einer solchen je drei der vier Kreissysteme Dreiecksnetze erzeugen.

sechs verschiedene Linearformen mit konstanten Koeffizienten. Betrachtet wird die durch das Gleichungstripel

$$x_i^* = a_i/b_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

erklärte *Punkttransformation* $\mathfrak{T} = X \to X^*$ zweier ebenen Systeme $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^*$, beschrieben durch die homogenen Punktkoordinaten x_i, bzw. x_i^*. — Die durch Nullsetzen der Linearformen (1) in $\mathfrak{S}$ ausgezeichneten Geraden mögen gleichfalls mit a_i und b_i bezeichnet werden; unter i, k, l stets irgend eine zyklische Anordnung der Indizes 1, 2, 3 verstanden, bedeute A_i den Schnittpunkt der Geraden a_k und a_l, B_i den Schnitt von b_k und b_l, C_i den Schnitt von a_i und b_i.

Wie nach Wegschaffen der Nenner in (2) zu erkennen ist, handelt es sich bei $\mathfrak{T}$ um eine *kubische Verwandtschaft*. Den *Geraden* g von $\mathfrak{S}$ entsprechen in $\mathfrak{S}^*$ *rationale Kurven 3. Ordnung* g^*. Die *Geraden* h^* von $\mathfrak{S}^*$ sind hingegen im allgemeinen die Bilder von *elliptischen Kubiken* h aus $\mathfrak{S}$; letztere sind einem *linearen Netz* entnommen, das von den drei zerfallenen Kubiken $a_i\, b_k\, b_l = 0$ aufgespannt wird, welche den Koordinatenachsen $x_i^* = 0$ zugeordnet sind. Da die Punkte B_i und C_i allen drei Netzkomponenten angehören, sind sie auch sämtlichen Kubiken h gemeinsam; das Netz der h besitzt mithin die *sechs Grundpunkte* B_1, B_2, B_3 und C_1, C_2, C_3, welche die *Hauptpunkte* der Ebene $\mathfrak{S}$ abgeben. Die Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ ist *dreieindeutig*, da im allgemeinen jedem Punkt X vermöge (2) ein einziger Bildpunkt X^* zugeordnet wird, hingegen jeder Punkt X^*, etwa als Schnitt zweier Geraden h^* aufgefaßt, die drei freien Schnittpunkte der entsprechenden Kubiken h als Urbilder X besitzt.

Einer Geraden h_i^* durch die — einen *Hauptpunkt* abgebende — Ecke A_i^* des Koordinatendreiecks in $\mathfrak{S}^*$, dargestellt durch

$$x_k^*/x_l^* = \lambda_i, \tag{3}$$

entspricht in $\mathfrak{S}$ eine zerfallende Kubik, bestehend aus der festen Geraden b_i und dem veränderlichen *Kegelschnitt* h_i

$$a_k\, b_l/a_l\, b_k = \lambda_i. \tag{4}$$

Dieser gehört dem von den Geradenpaaren a_k, b_l und a_l, b_k aufgespannten *Büschel* an, enthält also die festen Punkte A_i, B_i, C_k und C_l. — Das aus den drei Strahlbüscheln A_i^* aufgebaute *geradlinige Dreiecksnetz* wird mithin durch $\mathfrak{T}^{-1}$ in ein *Dreiecksnetz aus Kegelschnitten* verwandelt. Drei zusammengehörige — d. h. durch einen Punkt gehende — Gerade h_1^*, h_2^*, h_3^* sind gekennzeichnet durch

$$\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 = 1, \tag{5}$$

ebenso die drei zusammengehörigen Kegelschnitte h_1, h_2, h_3 des Dreiecksnetzes in $\mathfrak{S}$.

Damit hat sich ergeben der

Satz I: *Sind $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ zwei Dreiecke in der Ebene und C_1, C_2, C_3 die Schnittpunkte entsprechender Seiten, so erzeugen die den drei Büscheln $A_1B_1C_2C_3$, $A_2B_2C_3C_1$ und $A_3B_3C_1C_2$ entnommenen Kegelschnitte ein Dreiecksnetz. Je drei zusammengehörige Kegelschnitte haben drei Punkte gemein.*

2.

Ein aus diskret angeordneten Exemplaren gebildetes Dreiecksnetz ergibt sich bei Benützung der Parameterwerte

$$\lambda_i = m_i\, q^n \text{ mit } m_1\, m_2\, m_3 = 1, \quad q \neq 1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6}$$

Sind die Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ reell, so muß für ein reelles Dreiecksnetz auch q reell vorausgesetzt werden; das Netz enthält dann (von der trivialen Ausnahme $q = -1$ abgesehen) unendlich viele Kegelschnitte.

Reelle Dreiecksnetze existieren jedoch auch zu konjugiert-imaginären Grunddreiecken. Die Punkte C_i fallen hierbei auf jeden Fall reell aus, und die Parameterwerte λ müssen gemäß (4) lediglich mit Einheitsbetrag angenommen werden:

$$\lambda_j = \exp 2\, i\, \varphi_j \quad (j = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Zusammengehörige Netzlinien sind nun durch

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \pi) \tag{8}$$

gekennzeichnet, und man erhält ein diskretes Dreiecksnetz, wenn man

$$\varphi_j = \mu_j + n\,\delta \text{ mit } \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \equiv 0\,(\pi), \ \delta \not\equiv 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9}$$

wählt. Es besteht aus endlich vielen Kegelschnitten, die die Ebene einfach überdecken, wenn $N = \pi/2\,\delta$ ganz ist; im allgemeinen ist dann die Anzahl der Kegelschnitte $3\,N$, die Anzahl der eigentlichen Knoten $3\,N^2$.

In Abb. 1 ist ein derartiges Kegelschnitts-Dreiecksnetz dargestellt, das sich überdies durch dreizählige Drehsymmetrie auszeichnet. Mit Benützung inhomogener Normalkoordinaten x, y und ausgehend von dem Grundpunktepaar $A_1\,(0, i)$, $B_1\,(0, -i)$, aus welchem die übrigen durch Drehungen um $\pm 120^0$ hervorgehen, ergeben sich die Grundseiten

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv 2\,y + i = 0, \quad a_{2,3} \equiv \pm x\sqrt{3} + y - i = 0; \\ b_1 &\equiv 2\,y - i = 0, \quad b_{2,3} \equiv \pm x\sqrt{3} + y + i = 0; \end{aligned} \tag{10}$$

die Punkte C_j fallen in drei um je 120^0 versetzten Richtungen ins Unendliche.

Wegen der Drehsymmetrie genügt es, das erste Kegelschnittsbüschel (4) zu betrachten, wobei gemäß (7) $\lambda = e^{2i\varphi}$ zu setzen ist. Nach kurzer Rechnung erhält man über den verschwindenden Imaginärteil von

$$(x\sqrt{3} + y - i)(-x\sqrt{3} + y + i)(\cos\varphi - i\sin\varphi) \tag{11}$$

die Kegelschnittsgleichung

$$(x\sqrt{3}\sin\varphi + \cos\varphi)^2 - (y\sin\varphi)^2 = 1. \tag{12}$$

Es liegen durchwegs *Hyperbeln* mit 120° Asymptotenwinkel vor; Mittelpunktsabszisse und Halbachsen betragen der Reihe nach $-1/\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\varphi$, $1/\sqrt{3}\sin\varphi$, $1/\sin\varphi$. Die Konstruktion gestaltet sich recht einfach, wenn man beachtet, daß auch die *Scheitelkreise* der Hyperbeln einem *Büschel* — mit den Grundpunkten $(0, \pm 1/\sqrt{3})$ — angehören.

Den Parameterwerten der Figur liegen die Ausgangsgrößen $\mu_j = 0$ und $\delta = 15^0$ zugrunde ($N = 6$).

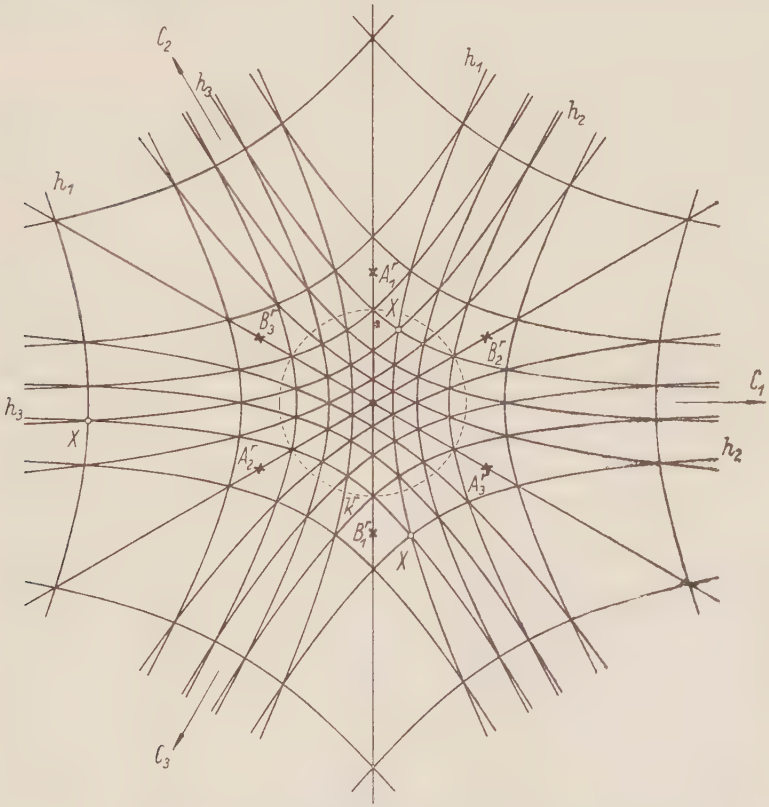

Abb. 1. Dreiecksnetz aus ähnlichen Hyperbeln. Die Ecken A, B der zugrundeliegenden konjugiert-imaginären Grunddreiecke sind durch ihre reellen Vertreter A^r, B^r wiedergegeben. — Je drei verbundene Knotenpunkte X bilden ein Poldreieck bezüglich des nullteiligen Kreises k, dessen reeller Vertreter gestrichelt eingetragen ist.

3.

Das in Abb. 1 dargestellte Dreiecksnetz ist nicht bloß in metrischer, sondern auch in projektiver Hinsicht ausgezeichnet: *Die Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ sind perspektiv, die Hauptpunkte C_1, C_2, C_3 liegen also auf einer Geraden.*

Eine Transformation $\mathfrak{T}$ dieses Typs tritt bei der *Spiegelung am elliptischen Paraboloid* auf und stellt unter Voraussetzung achsenparalleler Blickrichtung den Zusammenhang zwischen einem ebenen Feld $\mathfrak{S}^*$ und seinem primären Spiegelbild $\mathfrak{S}$ her. In einer diesbezüglichen Untersuchung[3] ergab sich die Feststellung, daß die drei primären Spiegelbilder eines Raumpunktes stets ein *Poldreieck* eines gewissen Kegelschnittes bilden, der als Spiegelbild des absoluten Kugelkreises aufzufassen ist. Entsprechend gilt auch hier

Satz II: *Im Falle perspektiver Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ bilden die drei gemeinsamen Schnittpunkte dreier zusammengehöriger Netzkegelschnitte stets ein Poldreieck jenes festen Kegelschnittes, bezüglich dessen die Grunddreiecke polar liegen.*

Wird nämlich ein beliebiger der Kegelschnitte h_1 herausgegriffen, so bilden auf ihm die von den Kegelschnitten h_2 und h_3 der anderen Büschel (neben C_3, bzw. C_2) ausgeschnittenen Punktetripel X eine *kubische Involution*. Die von solchen Tripeln aufgespannten Dreiecke sind dann bekanntlich einem bestimmten Kegelschnitt l_1 umgeschrieben und *Poldreiecke* eines weiteren Kegelschnittes k_1. Betrachtung der drei zerfallenden Kegelschnitte h_2 lehrt, daß die Pole von a_1, b_1 und A_2B_2 bezüglich k_1 der Reihe nach in B_1, A_1 und im zweiten Schnittpunkt $D_2 \neq C_3$ von C_1C_3 und h_1 zu suchen sind. Im Falle perspektiver Grunddreiecke fällt nun D_2 mit C_2 zusammen und es kann weitergeschlossen werden, daß der Geraden a_2 $(= A_1C_2)$ der Pol B_2 zugewiesen ist, analog a_3 der Pol B_3. Die Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ liegen also *polarreziprok* bezüglich des Kegelschnittes k_1, wodurch dieser umgekehrt vollständig bestimmt ist; er fällt jedenfalls unabhängig von h_1 aus und gilt daher für alle Tripel X im Felde $\mathfrak{S}$.

Soll anderseits eine gemeinsame Polarität für alle Tripel X bestehen, so muß sie den Punkten A_i die Seiten b_i zuordnen, und die Grunddreiecke müssen als polare Dreiecke notwendig *perspektiv* liegen.

Der Fundamentalkegelschnitt k spielt bei einer solchen besonderen Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ offenbar die Rolle der *Doppelkurve* des Systems $\mathfrak{S}$,

[3] *W. Wunderlich*, Mh. Math. 52 (1948).

da sich verbundene Punkte X nur auf k vereinigen können. Der Doppelkurve entspricht im Feld $\mathfrak{S}^*$ eine *Grenzkurve 6. Ordnung* mit Doppelpunkten in A_1, A_2, A_3; sie wird von den den Geraden g entsprechenden ∞^2 Kubiken g^* — die übrigens den der Achse $C_1C_2C_3$ entsprechenden Hauptpunkt C^* gemein haben — doppelt berührt.[4]

Jedes geradlinige Dreiecksnetz der Ebene $\mathfrak{S}$, das aus Strahlbüscheln mit Hauptpunkten als Scheiteln gebildet wird — es stehen hierfür die Punkte B_i und C_i zur Verfügung — wird durch die Transformation $\mathfrak{T}$ gleichfalls in ein Dreiecksnetz aus *Kegelschnitten* in $\mathfrak{S}^*$ verwandelt. Auf solche Dreiecksnetze, die die Grenzsextik als Einhüllende besitzen und eine kompliziertere Bauart aufweisen, soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden.

[4] Im allgemeinen Falle (nichtperspektiver Grunddreiecke) wird die Doppelkurve von einer die Hauptpunkte C_i enthaltenden *Kubik* gebildet, der wieder eine Grenzkurve 6. Ordnung mit den Knoten A_i entspricht. Letztere wird von den Geradenbildern g^* dreifach berührt, hingegen fehlt der nur im Sonderfalle vorhandene gemeinsame Hauptpunkt C^*.

Buchbesprechungen.

Oeuvres Mathématiques d'Évariste Galois suivies d'une notice sur Évariste Galois et la théorie des équations algébriques. Von *G. Verriest.* Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage. Paris: Gauthier Villars. 1951.

Die mathematische Welt ist Herrn Prof. Verriest und dem Verlag für die neuerliche Auflegung der Abhandlungen von Galois zu Dank verpflichtet. Damit sind sie wieder allgemein zugänglich, welche in keiner Bibliothek eines Mathematikers fehlen sollten. *E. Hlawka*, Wien

Oeuvres complètes, publiées par la Société Hollandaise des Sciences. Von *Chr. Huygens.* Band XXII., II, 921 S. La Haye: M. Nijhoff. 1950.

Der vorliegende Band bringt die große Gesamtausgabe, die 1885 von der Holländischen Akademie ins Leben gerufen wurde, zum Abschluß. Er enthält Nachträge zum Briefwechsel, vermischte Notizen wissenschaftlichen Inhaltes und eine eingehende Biographie von Huygens, deren Verfasser leider nicht genannt ist. Von Interesse ist auch die Faksimile-Wiedergabe des Auktionskataloges der nachgelassenen Bibliothek des großen Gelehrten.

Man bedauert, wenn man den mit der Wiedergabe eines Huygens-Bildnisses und einiger seiner Zeichnungen geschmückten Band aus der Hand legt, daß man nicht die Zeit aufbringen kann, um sich in diese schöne Welt des gelehrten 17. Jahrhunderts durch ausführliche Lektüre zu vertiefen. *J. Radon*, Wien

La vie émouvante et noble de Gay-Lussac. Von *E. Blanc* und *L. Delhoume.* Mit 4 Tafeln, 280 S. Paris: Gauthier Villars. ffr. 600.—.

Dieses Buch enthält eine Biographie des berühmten französischen Naturforschers. Bei der Abfassung waren die folgenden Gesichtspunkte maßgebend: 1. Die Geschehnisse seines Lebens, 2. Die wissenschaftlichen Leistungen, 3. Seine politische Tätigkeit. Das Buch hebt über dem buntbewegten politischen Hintergrund die Gestalt des G. L. als eines Aristokraten im besten Sinne des Wortes plastisch hervor und kann nicht nur dem Naturforscher, sondern auch jedem Historiker bestens empfohlen werden.

J. F. Lewandowski, Pfaffstätten b. Wien

Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I: XIII, 385 S. — Teil II: VI, 208 S. New York: Chelsea Publication Company. 1950.

Es handelt sich um eine photomechanische Reproduktion des vor nunmehr bald 25 Jahren bei Springer erschienenen wohlbekannten Werkes, das kurz nach Felix Kleins Tod von Courant und Neugebauer nach seinen während des ersten Weltkrieges gehaltenen Vorlesungen herausgegeben wurde. Obwohl die von Klein geplante Ergänzung und Überarbeitung dieser Vorlesungen ihm nicht mehr möglich war, sind sie doch für die Geschichte der Mathematik als

Zeugnis eines Gelehrten, der wie wenige andere die Entwicklung seiner Wissenschaft beeinflußt und sie auch auf jenen Gebieten mit kritischem Interesse verfolgt hat, in denen er nicht selbst schöpferisch hervortrat, von unschätzbarem Wert, so daß diese Neuausgabe wohl allseitig freudig begrüßt werden dürfte. Durch eine kaum merkliche Verkleinerung des Satzspiegels und eine etwas stärkere Reduktion des Randes ist ein sehr handliches und bequemes Format erreicht worden, die buchtechnische Ausstattung ist erstklassig. Hingewiesen sei noch auf die am Ende der beiden Bände zu findenden Ankündigungen des Verlages über eine ganze Reihe von analogen Neuauflagen älterer, heute meist vergriffener Werke, meist aus deutschen Verlagen.

J. Radon, Wien

Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. Von *W. Lietzmann*. Siebente Auflage. Mit 175 Textabb. und 8 Tafeln, 273 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Das längst bekannte und sehr geschätzte Buch, das mehrere Jahre vergriffen war, ist soeben in einer neuen erweiterten Auflage erschienen. Das Buch enthält viel aus der sogenannten mathematica delectans: Zitate über Mathematik von den ältesten Zeiten bis auf die heutigen Tage. Gelegenheitsdichtungen, Anekdoten, Erraten von Zahlen, Schnellrechenverfahren, Dyadisches Zahlensystem, Paradoxe, Fehlschlüsse, Faltaufgaben, Streichholzaufgaben, Knoten usw. Das Buch setzt keine mathematischen Kenntnisse voraus und kann Fachleuten und Nichtfachleuten wärmstens empfohlen werden. Jeder wird da oder dort etwas Neues finden, das ihm Freude bereitet.

J. F. Lewandowski, Pfaffstätten b. Wien

Sonderlinge im Reiche der Zahlen. Von *W. Lietzmann*. Mit 5 Textabb., 175 S. Bonn: F. Dümmler. 1948. DM 6.20.

Wer des Verf. bisher erschienene Büchlein kennt — für das vorliegende vgl. man z. B. „Riesen und Zwerge im Zahlenbereich", Teubner 1916 — wird nicht ungern zu dem neuen Werkchen greifen und mit Bewunderung feststellen, daß der Verf. immer etwas Neues zu erzählen weiß. Eine Unzahl von Rechenkniffen und „Zahlenplaudereien" werden gegeben, doch wird nach Möglichkeit immer der allgemeine Charakter des Erhaltenen angedeutet, so daß den Dingen auch zahlentheoretisches Interesse nicht abzusprechen ist. Sehr hübsch ist der Abschnitt „Kleine Monographien von kleinen Zahlen", welcher die ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe auch von der kulturhistorischen Seite beleuchtet. Im Abschnitt über unendliche Reihen und Produkte sind die derzeit bekannten 707 Dezimalen von π tatsächlich aufgeschrieben. Im letzten Abschnitt wird kurz der Unterschied zwischen dem potentiell und aktual Unendlichen dargelegt und mit einem Ausblick auf die Mengenlehre geschlossen. Man wird in Mußestunden gerne in dem Büchlein lesen.

L. Schmetterer, Wien

Introduction to Linear Algebra and the Theory of Matrices. Von *H. Schwerdtfeger*. 280 S. Groningen: P. Noordhoff. 1950. hfl. 15.—.

Wenn es auch bereits sehr gute Lehrbücher über lineare Algebra gibt, so ist dieses Buch doch eine wertvolle Bereicherung. Die Darstellung ist ausgezeichnet und vielfach neu. Die ersten Kapitel bringen lineare Gleichungssysteme und Determinanten, ferner Transformationen, die Grundlagen der Matrizenrechnung, bilineare Formen und quadratische Formen. Dann folgt die Einteilung der

Matrizen in Klassen nach verschiedenen Äquivalenzbegriffen bei vorgegebenen Gruppen, Aufsuchen der Normalformen oder was auf das Gleiche hinauskommt, Ermittlung der Invarianten. Als geometrische Anwendung werden Kollineationen, Korrelationen, speziell Nullsysteme gebracht. Der Verf. geht meist von höherem Standpunkt an ein Problem heran und beleuchtet die Bedeutung nach verschiedenen Gesichtspunkten. Nach jedem Kapitel werden Übungen gestellt, die vielfach eine Ergänzung zu den theoretischen Ausführungen darstellen. Das Buch gibt eine vorzügliche Grundlage für weiteres Eindringen in die höhere Algebra, in die Gruppentheorie, insbes. Darstellungstheorie, und liefert das richtige Verständnis für lineare Operationen in den verschiedenen Zweigen der Mathematik, aber auch der mathematischen Physik.

N. Hofreiter, Wien

Einführung in die höhere Algebra. Von *G. Pickert*. (Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher: Band VII.) 298 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1950. DM 14.80.

An sachlichen Vorkenntnissen wird nur sehr wenig vorausgesetzt und doch kann ich das Buch den Studenten der Mathematik erst dann empfehlen, wenn sie bereits Vorlesungen über Algebra besucht und verarbeitet haben. Das tue ich deshalb, weil die Darstellung sehr abstrakt ist. Ein Beispiel: In den meisten Lehrbüchern beschränkt man sich darauf, zu beweisen, daß jede abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden direktes Produkt von zyklischen Gruppen ist. Hier hingegen wird (S. 149) der umfassendere Satz bewiesen: „Für einen euklidischen Ring R ist jeder endliche R-Modul M, in welchem das Einselement von R die identische Transformation hervorruft, direkte Summe von R-Moduln, die jeder von einem Element erzeugt werden". Dieses Beispiel zeigt, daß der Verf. sich bemüht, die Sätze möglichst allgemein auszusprechen, was den Studenten Schwierigkeiten bereitet. Ziel des Buches ist, den Leser mit den Begriffen und Problemen der modernen, abstrakten Algebra vertraut zu machen. Dieses Ziel wird auch wirklich erreicht. Ausgehend vom Begriff der algebraischen Struktur werden die grundlegenden Begriffe: Gruppe, Modul, Verband, Algebra, Ring, Integritätsbereich, Körper entwickelt. Dann folgt noch eine große Menge weiterer Begriffe, die alle zu verstehen und mit ihnen zu operieren, größere Auffassungskraft voraussetzt. Klarerweise werden alle wichtigen Sätze über Gruppen, Integritätsbereiche und Körper gebracht. Auch die Galois'sche Theorie wird in abstrakter Gestalt dargestellt. Das letzte Kapitel ist der Bewertungstheorie gewidmet, die für die moderne Algebra und für die algebraische Zahlentheorie von großer Bedeutung ist. Manches, was sonst in einem Lehrbuch der Algebra ausführlich dargestellt wird, wird hier nur kurz erwähnt. So ist der Hauptsatz über elementarsymmetrische Funktionen nur eine Übungsaufgabe (S. 220) und der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra wird mit einer Fußnote (S. 262) abgetan.

N. Hofreiter, Wien

Mathematische Vorschule für Ingenieure und Naturforscher. Von *L. Weliczker*. Mit 96 Textabb., 356 S. München: R. Oldenbourg. 1950. DM 12.50.

Ein Lehrbuch der Mathematik für Ingenieure und Naturforscher zu schreiben, stellt an den Verf. immer hohe didaktische Ansprüche, da einerseits auf eine exakte Darstellung nicht verzichtet werden kann, anderseits für die Anwendung die Mathematik nicht Selbstzweck ist. Es gilt also einen Mittelweg zu beschreiten und dies ist hier im großen und ganzen gelungen. In ganz besonderem Maße trägt hiezu die überaus reichhaltige Aufgabensammlung am Schluß

des Buches bei, welche weit über 200 gut durchgearbeitete Beispiele mit ihren Lösungen enthält und dem Studierenden wirklich unerschöpfliches Übungsmaterial darbietet. Den Differentialquotienten vor dem Begriff der Stetigkeit einzuführen, kommt dem bekannten Bedürfnis der Anfänger entgegen, möglichst bald die Grundlagen zu überwinden und zur Technik des Differenzierens aufzusteigen. Allerdings sind die Grundlagen (Zahlbegriff, Grenzwert, Funktionsbegriff) auf knappen 4 Seiten doch etwas zu kurz gekommen. Das bestimmte Integral wird nur für stetige Funktionen erklärt. Definition und Handhabung des Doppelintegrales werden soweit angedeutet, daß man einfache Anwendungen bewältigen kann. Die Stoffauswahl entspricht annähernd der Jahresvorlesung über Differential- und Integralrechnung. Einwände könnte man allenfalls erheben gegen die Art der Einführung des Reihenbegriffes, die unmotivierte Verwendung des Mengenbegriffes auf S. 119; bei der Berechnung des Flächeninhaltes „krummlinig begrenzter Flächenstücke" erkennt man kaum, daß der Inhalt erst durch das Integral definiert wird, die Herleitung der Regel von de l'Hopital (S. 103) ist nicht ganz korrekt, „monotone Funktion" habe ich nirgends erklärt gefunden (der Begriff fehlt auch im Sachverzeichnis), erscheint aber in einer Aufgabe über Fourierreihen, aber dies und ähnliche Kleinigkeiten tun der Nützlichkeit des Buches keinen Abbruch und lassen sich wohl unschwer beheben. Eine Tafel wichtiger Zahlenwerte, eine nach Zehnteln fortschreitende Tabelle von e-Potenzen und ein historischer Anhang, kurze Biographien berühmter Mathematiker enthaltend, bilden den Schluß. Das Buch wird sich in dem vorgesehenen Leserkreis bald Freunde erwerben. *L. Schmetterer*, Wien

Differential- und Integralrechnung. Von *O. Haupt*, *G. Aumann* und *C. Pauc*. II. Band: Differentialrechnung. (Göschens Lehrbücherei: I. Gruppe, Band 25.) 209 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1950. DM 16.50.

Ebenso wie der erste Band hat auch der zweite eine so gründliche Umarbeitung erfahren, daß man richtig von einem neuen Buch sprechen kann. Noch deutlicher als bisher ist der spezifische Charakter des Werkes ausgeprägt, das kein Lehrbuch für den Anfänger sein will, sondern mit den Hilfsmitteln der modernen reellen Funktionentheorie und der Mengenlehre die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung analysiert und bis in ihre letzten Feinheiten verfolgt. Durch eine sehr konzentrierte Ausdrucksweise, die es dem Leser nicht immer leicht macht, und eine satztechnische Anordnung, die der Raumersparnis als höchstem Gebot huldigt, ist es gelungen, den Umfang des Bandes trotz wesentlicher Vermehrung des Inhaltes nur in mäßigen Grenzen zu vergrößern. Die Anordnung des Stoffes ist die alte geblieben. Am wenigsten geändert hat sich der erste Abschnitt des ersten Teiles (Elemente der Differentialrechnung). Hier ist an stofflich Neuem außer kleineren Zusätzen (Wronskische Determinante, Asymptoten) ein Schlußparagraph über höhere Differenzenquotienten und Interpolation neu angefügt. Der zweite Abschnitt bringt jetzt zunächst den allgemeinen Deriviertenbegriff, wobei bereits der Begriff der Menge vom Maße Null, der erst im 3. Band seine Begründung findet, vorgreifend benutzt wird, um z. B. die Monotonie einer Funktion mit endlicher, nicht negativer vorderer Deriviertenfunktion nachweisen zu können. Es folgt die Darstellung höherer Ableitungen durch Grenzwerte von Differenzenquotienten, wobei auch die Konvexität (n-ter Ordnung) behandelt wird. Schmiegkreis und Ordnungswert von Kurvenbogen werden anschließend betrachtet. Weiter werden die Limeswertmengen reeller Funktionen von einer und mehreren Veränderlichen besprochen. Hierauf werden die Deriviertenmengen reeller Funktionen einer Veränderlichen mit Hilfe des Begriffs „kontingent" und unter Heranziehung der

Lebesgueschen Maßtheorie studiert. (Die benötigten Sätze sind in einem Anhang des Bandes zusammengestellt.) So gelingt es, die allgemeinen Ergebnisse von Denjoy über die Wertverteilung der Derivierten herzuleiten.

Im zweiten Teil (Funktionen mehrerer Veränderlicher) erfährt die geometrische Deutung der Differenzierbarkeit eine eingehendere Behandlung als früher; man findet hier auch die schöne Kennzeichnung der Differenzierbarkeit nach Ostrowski, die dann zu dessen schöner Bedingung für die Vertauschbarkeit der Differentiationen führt. Den Systemen von Funktionen ist der letzte Abschnitt des Buches gewidmet. Hier werden namentlich die Theorie der Abbildungen und die Sätze über die Funktionaldeterminante eingehend erörtert.

In der neuen Gestalt wird das schöne Buch sicher noch mehr als bisher seinen Zweck erfüllen, dem Leser, der in schwierigeren Fragen Rat und Auskunft sucht, beides in reichem Maß darzubieten. *J. Radon*, Wien

Differential- und Integralrechnung. Von *K. Dörge*. Teil I. Mit 117 Textabb., 270 S. Bonn: F. Dümmler. 1948.

Jedes neue Buch über den vielbehandelten Stoff nimmt man mit einer gewissen Neugier in die Hand. Die erste Frage: Wird es exakt oder das Gegenteil sein? Diese braucht man bei dem bekannten Verf. in unserem Fall nicht zu stellen; man weiß von vornherein, daß hier sicher alles in Ordnung ist. Also bleibt die — interessantere — Frage: Was hat der Verfasser methodisch Neues zu bieten? Zunächst die Anordnung des Stoffes: die jetzt so beliebte Methode das bestimmte Integral vor der Ableitung einzuführen, hat der Verf. nicht mitgemacht; er hat darin durchaus meine Zustimmung, denn der Grenzprozeß der Integralrechnung ist viel schwieriger zu erfassen als der der Differentialrechnung. Dafür stellt er den fundamentalen Grenzbegriff für Zahlenfolgen an das Ende des Buches, auch das hat seine Berechtigung, denn das Material der höheren Analysis sind eben die Funktionen und man kann, wie das Buch zeigt, ganz gut nach Einführung der reellen Zahlen und der Begriffe „obere und untere Grenze" sogleich Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen behandeln. Die Differenzierbarkeit von Funktionen wird vom Verfasser mit einer gründlichen Erörterung des Tangentenbegriffes verknüpft; die Definition der Tangente durch „Sektorstreifen" erweist sich als analog zur Definition der Stetigkeit durch Horizontalstreifen, was der Verfasser in einem eigenen Kapitel mit Hilfe von „Sektorstreifen um Polynome" zu einer Theorie der Schmiegpolynome ausbaut, die in enger Beziehung zum Taylorschen Lehrsatz steht. Im übrigen geht der Verf. keine ungewöhnlichen Wege; er geht sie aber trotzdem mit äußerster Behutsamkeit und ist stets darauf bedacht, dem Leser keine Schwierigkeit etwa durch einen kühnen Sprung weg zu eskamotieren. Darum bedient er sich einer sehr sorgfältig gewählten Ausdrucksweise, die das Hauptargument auf Präzision legt, auch wenn dies sprachliche Härten mit sich bringt.

Alles in allem: ein Lehrbuch, das seine Existenzberechtigung sicher erweisen wird, es kann als zuverlässiger Führer für die ersten Schritte des angehenden Mathematikers bedenkenlos empfohlen werden. *J. Radon*, Wien

Integraltafel. Zweiter Teil: Bestimmte Integrale. Herausgegeben von *W. Gröbner* und *N. Hofreiter*. VI, 204 S. Wien und Innsbruck: Springer-Verlag. 1950. S 87.—, sfr. 25.—, $ 5.80, DM 24.—.

Sehr treffend schreiben die Verfasser in ihrem Vorwort: „Der zweite Teil der Integraltafel, welcher die bestimmten Integrale umfaßt, gleicht in seinem

Aufbau dem ersten Teil. Er enthält vor allem solche Integrale, die im ersten Teil nicht vorkommen, weil die betreffenden Integralfunktionen nicht näher bekannt oder nicht tabelliert sind, so daß nur bei speziellen Grenzen bekannte Zahlwerte oder bekannte Parameterfunktionen auftreten. Um jedoch praktischen Bedürfnissen entgegenzukommen, wurden auch viele Integrale, die schon im ersten Teil verzeichnet sind, für spezielle, besonders häufig vorkommende Grenzen ... aufgenommen." Um die Tafel bei Beschränkung auf einen nicht zu großen Umfang möglichst vollständig zu gestalten, haben die Autoren soweit als möglich gleichartige Integrale durch Einführung von Parametern zusammengefaßt. Das erleichtert die Übersicht, besonders dadurch, daß überall der Geltungsbereich der Formeln angegeben ist. Für die kleine Mühe des Einsetzens von Parameterwerten wird der Benützer reichlich dadurch entschädigt, daß er viel mehr Integrale wirklich findet, als wenn von jeder „Integralfamilie" nur einzelne Vertreter aufgenommen wären, auf die er das gesuchte Integral transformieren müßte. Jede Formel kann an Hand der beigesetzten Hinweise nachgeprüft werden. Dazu sind eingangs die verwendeten Methoden der Gewinnung von bestimmten Integralen zusammengestellt. Durch diese Hinweise wird die Tafel auch zu einer reizvollen und sehr lehrreichen Lektüre. Die Abschnitte sind: 1. Rationale Integranden (darunter besonders orthogonale Polynome), 2. Algebraisch irrationale Integranden (darunter sehr ausführlich die elliptischen Integrale), 3. Elementare Transzendente Integranden (mit vielen Unterabteilungen), 4. Eulersche Integrale, 5. Integrale von Zylinderfunktionen.

Durch diesen zweiten Teil wird die Tafel zu einem Werk abgerundet, das die in der Besprechung des ersten Teils hervorgehobenen Vorzüge der wissenschaftlichen Höhe, Nützlichkeit und Ausstattung erst recht hat.

L. Vietoris, Innsbruck

Integraltafeln. Sammlung unbestimmter Integrale elementarer Funktionen. Von *W. Meyer zur Capellen*. VIII, 292 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. DM 36.—.

Es spricht für den dringenden Bedarf einer größeren Integraltafel, daß der Autor und die Arbeitsgruppe für Industrie-Mathematik nahezu gleichzeitig aufgefordert wurden, eine solche Tafel herzustellen. Die Durchführung erfolgte im Krieg, ohne voneinander zu wissen. Die von der Arbeitsgruppe bearbeitete Tafel erschien 1944 im Notdruck und 1949, bzw. 1950 in stark erweiterter Form im Springer-Verlag in Wien. (Gröbner-Hofreiter, Integraltafel, I Unbestimmte Integrale, II Bestimmte Integrale). Die von Meyer zur Capellen bearbeitete Tafel der unbestimmten Integrale liegt nun im Druck vor. Um die Tafel mit Erfolg benützen zu können, sind einige Kenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung erforderlich. Auch soll man mit der Tafel vertraut sein. Der erste Abschnitt enthält die wichtigsten Integrationsregeln und Bemerkungen zum Gebrauch der Tafeln. Der zweite bis fünfte Abschnitt bringt die Integralformeln. Die Einteilung erfolgt nach dem Integranden (rationale Funktionen, algebraisch irrationale Funktionen, transzendente Funktionen, Produkte von algebraischen und transzendenten Funktionen, Produkte von transzendenten Funktionen). Jeder dieser Abschnitte ist vielfach unterteilt. Man benutzte das ausführliche Inhaltsverzeichnis, um das gesuchte Integral rasch zu finden. Manchmal werden Rekursionsformeln angegeben; meist sind die Integrale ganz ausgerechnet. Besonders groß ist die Zahl der Sonderfälle, was dem mathematisch Ungeübten oft erwünscht ist, anderseits den Umfang der Tafel wesentlich vergrößert. Bei der Numerierung gibt es elfstellige Zahlen, was mir nicht

vorteilhaft erscheint. Im sechsten Abschnitt sind wichtige Konstante und einige Reihenentwicklungen zusammengestellt. Ferner werden einige nicht elementare Funktionen erklärt.

Die Tafel enthält ca. 3000 Integrale und ist ein sehr wertvoller Behelf für den angewandten Mathematiker. Der schwierige Druck ist sehr gut gelungen.

N. Hofreiter, Wien

Lehrbuch der Funktionentheorie. Von *L. Bieberbach*. I: Vierte Auflage. 322 S. — II: Zweite Auflage. 370 S. New York: Chelsea Publishing Company. 1945.

Es liegt ein photomechanischer Nachdruck des überall bekannten und gerühmten Lehrbuches vor. Frühere Besprechungen finden sich in Mh. Math. **33**, 13 (1923), **36**, 39 (1929), **38**, 11 (1931), **39**, 13 (1932). *N. Hofreiter*, Wien

Kugelfunktionen. Von *J. Lense*. (Mathematik und ihre Anwendungen in der Technik: Reihe A, Band 23.) XIII, 294 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. 1950.

Bei der großen Bedeutung der Kugelfunktionen für Physik und Technik wird man es oft als Mangel empfunden haben, daß in deutscher Sprache nicht eine ähnliche Monographie dieses Gebietes existiert wie etwa Hobson's „Spherical Harmonics" im Englischen. Diesem Mangel hat der Verfasser nun durch einWerk abgeholfen, das sicherlich allen Ansprüchen gerecht wird, obwohl es etwas geringeren Umfang aufweist als das Hobson'sche. Von diesem unterscheidet es sich auch durch den breiteren Raum, der den Anwendungen gewidmet ist. Der Stoff ist in drei Abschnitte geteilt. Im ersten werden die Kugelfunktionen ganzzahliger Zeiger auf klassische Weise mittels der Potentialgleichung eingeführt und ihre Eigenschaften auf möglichst zwanglose Weise hergeleitet. Hier findet sich z. B. auch eine einfache Diskussion der Entwicklung einer reellen Funktion nach Legendre'schen Polynomen. Der interssanteste Teil des Buches ist wohl der zweite, in dem die Kugelfunktionen mit beliebigem komplexen Index untersucht werden. Die Darstellung ist hier reichhaltig und sehr gründlich. Besonders sei auf die asymptotischen Entwicklungen mittels der Sattelpunktsmethode verwiesen. Konsequent wird im ganzen Buch die Integration über komplexe Wege gehandhabt und auch ein Kenner wird hier noch manches lernen können. Der dritte Abschnitt ist den Anwendungen gewidmet, von denen auch weniger landläufige gebracht werden, z. B. Probleme in Toruskoordinaten. Alles in allem kann man sicher sein, daß dieses ausgezeichnete Buch einen wohlverdienten Platz als Standardwerk für Kugelfunktionen einnehmen wird.

K. Prachar, Wien

Praktische Funktionenlehre. Von *F. Tölke*. Erster Band: Elementare und elementare transzendente Funktionen. Zweite, stark erweiterte Auflage. Mit 178 Textabb., 50 durchgerechneten Beispielen und einer Ausschlagtafel, XI, 440 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. Geb. DM 39.—.

Das Buch gehört zu jenen Werken, die den Bedürfnissen der Technik und Industrie entgegenkommen. Es steht in der Mitte zwischen einem Lehrbuch und einem Tafelwerk. Der erste Abschnitt bringt die elementaren Funktionen (Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, Potenzfunktion, Kreisfunktionen, Hyperbelfunktionen, arcus- und Areafunktionen, Amplitudenfunktionen), ihre gegenseitigen Beziehungen und grundlegenden Eigenschaften, ferner ihre Beziehungen zu Differential- und Integralgleichungen. Der zweite Abschnitt

enthält Integrale, die durch elementare und elementartranszendente Funktionen ausdrückbar sind. Die Integrale sind in 6 Klassen angeordnet. Neben allgemeinen Formeln werden sehr viele Sonderfälle angeführt. *Gröbner* und ich haben in unserer Integraltafel eine andere Auswahl und Anordnung getroffen, die uns besser erscheint. Doch muß man Auswahl und Anordnung dem Autor überlassen. Der dritte Abschnitt bringt Funktionentafeln der elementaren Transzendenten. Diese ersten drei Abschnitte wurden unverändert aus der ersten Auflage übernommen. Nun folgen aber noch: Anwendungen im Bereich der partiellen Differentialgleichungen und Integralgleichungen (4. Abschnitt); insbes. Wärmeleitungsgleichung und Wellengleichung. Alles, was hier gebracht wird, ist reich mit technischen Anwendungen versehen, wie Temperaturfelder, Biegungsschwingungen von Balken und Platten, Torsion von Stäben, Stoßerscheinungen in hydraulischen Leitungen, Wasserspiegelanlage und Wassersprung in offenen Gerinnen, Grundwasser und Sickerströmungen, Membrane unter Querbelastung. Der fünfte Abschnitt bringt auf neun Seiten eine Tafel unendlicher Reihen. Es ist damit eine fürs Erste gute Auswahl getroffen. Es wäre aber eine ausführliche Tafel der Reihen sehr erwünscht. Der sechste Abschnitt ist den Kugelfunktionen gewidmet.

Das Buch stellt eine sehr wertvolle Bereicherung der Literatur für angewandte Mathematik dar.

N. Hofreiter, Wien

Partielle Differentialgleichungen. Von *J. Horn*. Vierte Auflage. (Göschens Lehrbücherei: 1. Gruppe „Reine und angewandte Mathematik", Bd. 14.) Mit 8 Textabb., VIII, 228 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1949. DM 14.—.

Es ist sehr zu begrüßen, daß das ausgezeichnete Buch wieder erschienen ist. Es enthält die Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, ferner hyperbolische, elliptische und parabolische Differentialgleichungen mit zahlreichen Anwendungen, und ein Kapitel über lineare Integralgleichungen. Die Auflage ist unverändert. Frühere Besprechungen in Mh. Math. 22, 27 (1911) und 37, 11 (1930).

N. Hofreiter, Wien

Eigenwertprobleme mit technischen Anwendungen. Von *L. Collatz*. Mit 137 Textabb. und 15 Tafeln, XVII, 466 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. 1949.

Der bekannte Fachmann auf diesem Gebiet hat seinem ausgezeichneten Artikel in der ZAMM 19 (1939) 1945 ein Lehrbuch über diesen Gegenstand mit dem Titel „Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung" im gleichen Verlag folgen lassen, welches jetzt in einer erweiterten Neuauflage vorliegt. Zunächst wird eine Fülle von technischen Eigenwertproblemen, vor allem aus der Mechanik, vorgeführt. Dann werden die mathematischen Hilfsmittel bereitgestellt und die mathematische Theorie entwickelt, stets unterstützt durch Beispiele, welche die auftretenden Möglichkeiten illustrieren. Im Mittelpunkt stehen natürlich die Minimaleigenschaften der Eigenwerte. Der Entwicklungssatz wird bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen der sog. Eingliedklasse sorgfältig bewiesen. Wünschenswert wäre, wenn möglich, eine stärkere Berücksichtigung der wichtigen zweiparametrigen Eigenwertprobleme. Jetzt folgen die Näherungsmethoden: Schrittweise Näherung (numerisch und graphisch), Einschließungssätze, „Ritzsche Ansätze" (Galerkin, Kamke, Grammel). Dann folgt ein Kapitel über Eigenwertaufgaben bei Matrizen, ein Kapitel, welches erst in dieser Auflage dazugekommen ist. Es wird hervorgehoben, wie die Begriffsbildungen der Matrizentheorie auf Integrodifferentialgleichungen übertragen

werden können. Interessant sind unter den behandelten Beispielen jene über die „Wertverteilung" auf Polyedern. Dann folgt das Differenzenverfahren, welches gerade bei den partiellen Differentialgleichungen an Beispielen ausführlich erläutert wird. Sodann die Störungsrechnung und eine Reihe anderer Methoden. Der Abschluß wird gebildet durch Ratschläge für die Auswahl des zu benützenden Verfahrens bei einem vorliegenden Problem, (diese sind außerordentlich wertvoll, da sie ja von einem Manne gegeben werden, der auf diesem Gebiet über riesige Erfahrung verfügt), eine Zusammenstellung der behandelten Beispiele und einem Tafelanhang von Beispielen mit Literaturangaben, deren Anzahl größer als 100 ist. Hier hat der Verf. eine unschätzbare Arbeit geleistet. Hervorzuheben sind die geschichtlichen Bemerkungen und die schöne Tafel, welche die Porträts der Männer enthält, welche die Grundlagen geschaffen haben. Das Buch ist klar geschrieben und der Text von vielen Figuren, Diagrammen und Beispielen begleitet. Dieses Werk ist für jeden Mathematiker, Physiker und Techniker unentbehrlich. Die Ausstattung ist sehr gut. *E. Hlawka*, Wien

Bestimmungen der allgemeinen Lösung der Schrödinger Gleichung für Coulomb-Potential. Von *H. Krupp*. (Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften in Leipzig. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: Band 97, Heft 8.) Berlin: Akademie-Verlag. 1950.

Den radialen Bestandteil der obigen Gleichung behandelt man gewöhnlich unter den Randbedingungen, daß er für den Nullpunkt endlich sei und im Unendlichen gegen Null gehe. Verschiedene Probleme führen nun dazu, die Gleichung ohne diese Randbedingungen zu lösen. Dies wird hier durch Reihenansatz durchgeführt und auftretende Funktionen tabelliert. *E. Hlawka*, Wien

Über eine lineare Integrodifferentialgleichung mit Zusatzkern. Von *H. Schubert*. (Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften in Leipzig. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: Band 97, Heft 7.) Berlin: Akademie-Verlag. 1950. DM 9.25.

Aufgaben der Aerodynamik führen auf eine solche Gleichung, deren Kern, grob gesprochen, einen Pol erster Ordnung besitzt. Gesucht sind nun stetige Lösungen, welche in den Endpunkten verschwinden und noch gewissen Bedingungen genügen. Der Verf. führt dies auf eine verallgemeinerte dritte Randwertaufgabe zurück, welche mit sukzessiver Approximation behandelt wird. Die Arbeit zeichnet sich durch große Sorgfalt aus. Die benötigten potentialtheoretischen Sätze werden unter ausschließlicher Benützung des Riemann'schen Integralbegriffes ausführlich hergeleitet. *E. Hlawka*, Wien

Vektor- und Dyadenrechnung. Von *E. Lohr*. Zweite Auflage. Mit 34 Textabb., XV, 488 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1950. DM 24.—.

Die zweite Auflage des bekannten Buches wurde gegenüber der ersten (siehe die Besprechung in Mh. Math. 49, 28 (1941), um einige Ergänzungen vermehrt, deren Aufnahme sich als wünschenswert erwies. Wir nennen hier nur die folgenden: Ergänzungen zur Potentialtheorie, Formalismus der speziellen Relativitätstheorie und der Matrizenmechanik usw. *K. Prachar*, Wien

Interpolation. Von *J. F. Steffensen*. Zweite Auflage. IX, 248 S. New York: Chelsea Publishing Company. 1950.

Da die erste Auflage dieses Buches in dieser Zeitschrift nicht besprochen wurde, soll dies hier kurz nachgeholt werden. Die Lektüre erfordert nur die

einfachsten Kenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung. Natürlich bleiben schwierigere Fragen, z. B. aus der Differenzenrechnung beiseite, aber es ist eben Hauptzweck des Buches, dem Praktiker zur Seite zu stehen, z. B. bei der Konstruktion von Tafeln usw., was durch viele numerische Beispiele noch unterstrichen wird. Recht ausführlich wird die Frage nach der Summierung von Funktionswerten, welche äquidistanten Argumenten entsprechen, besprochen (Summenformeln von *Laplace*, *Gauß*, *Euler*, *Lubbock*, *Woolhouse*). Ein bißchen knapp ist meines Erachtens der Abschnitt über mechanische Quadratur geraten, wofür allerdings ein Hinweis auf den Enzyklopädieartikel von Runge-Willers entschädigen soll. Ein Anhang behandelt die Frage nach geschlossenen Ausdrücken für Differentialquotienten beliebiger Ordnung, wobei von einer expliziten Formel für die n-te Ableitung einer rationalen Funktion ausgegangen wird und daraus auf die Ableitungen der elementaren Funktionen geschlossen wird. Die hübsche, saubere Darstellung wird man insbesondere den Studierenden der Statistik und des Versicherungswesens empfehlen — das Buch ist ja auch aus Vorlesungen vor Studenten dieser Richtung hervorgegangen.

L. Schmetterer, Wien

Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra. Von *E. Sperner*. 1. Teil. (Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher: Band I.). Mit 45 Textabb., 347 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1948. DM 23.—.

Dieses Buch ist aus einer gründlichen Umbearbeitung des gleichbetitelten Buches von Schreier-Sperner entstanden. Wohl sind manche Paragraphen wörtlich übernommen worden, aber vieles ist geändert, vieles ganz neu. Die Darstellung war schon früher ein Muster für Klarheit und Faßlichkeit. Dies ist natürlich auch jetzt der Fall. Die Darstellung ist sogar noch breiter und noch mehr Erklärungen helfen dem Leser. Die Gedankengänge sind konstruktiver; neben der reinen Theorie wird auch die praktische Seite mehr betont. Dies zeigt sich gleich bei den linearen Gleichungssystemen, wo gezeigt wird, wie die Auflösung wirklich durchgeführt wird. Daher werden schon sehr bald die elementaren Umformungen einer Matrix besprochen, mit deren Hilfe sich die rechnerisch brauchbarste Methode zur Auflösung linearer Gleichungen ergibt (Eliminationsverfahren). Auch bei den Determinanten ist vieles geändert und für das Rechnen vorteilhafter geworden. Neu sind die Größen höherer Stufe (Graßmannsche Ausdehnungslehre), aus denen das äußere und das innere Produkt von Vektoren und Volumsberechnungen von Parallelelotopen elegant folgen. Neu sind ferner die metrischen Formeln in einem Parallelkoordinatensystem und eine affine Klassifikation der Kurven und Flächen 2. Ordnung. Auch viele Übungsaufgaben sind hinzugekommen. Das Buch stellt für Studierende ein ausgezeichnetes Lehrbuch über lineare Algebra und n-dimensionale Analytische Geometrie dar.

N. Hofreiter Wien

Analytische Geometrie. Von *F. Neiss*. Mit 64 Textabb., VIII, 167 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. DM 9.60.

Dies ist ein Lehrbuch der analytischen Geometrie, das den Studenten wärmstens empfohlen werden kann. Die Auswahl des Stoffes ist eine sehr glückliche und die Darstellung ist pädagogisch und wissenschaftlich hervorragend. Das erste Kapitel bringt eine elementare Einführung über Gerade und Ebene; Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Es schließt sehr gut an den Unterricht der Schule an. In den nachfolgenden Kapiteln werden Vektorrechnung, Determinantentheorie und Matrizenrechnung als bekannt vorausgesetzt. Wer damit nicht vertraut ist, studiere das ausgezeichnete Buch: Determinanten und Matrizen von

F. Neiss. 3. Aufl. Springer-Verlag, Berlin, 1948. Nun wird die Geometrie der Geraden und Ebene neuerdings, und zwar in eleganter Weise entwickelt. Dann folgen kongruente und ähnliche Abbildungen, die projektive Geometrie der linearen Gebilde, Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Dem Erlanger Programm entsprechend ist die metrische und projektive Geometrie klar unterschieden. Dadurch wird die Geometrie der Schule von einem höheren, gruppentheoretischen Standpunkt aus gesehen. Jedes Kapitel enthält zahlreiche Übungsaufgaben, die teils zu Übungszwecken dienen, teils weitere Sätze vermitteln. *N. Hofreiter*, Wien

Analytische Geometrie. Von *G. Engel.* Mit 125 Textabb., 239 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1950. DM 18.—.

Das Buch will einen Beitrag leisten, um die Schwierigkeiten zwischen dem Mathematik-Unterricht in der Schule und der Mathematik in der Hochschule zu überbrücken. Dementsprechend ist die Darstellung i. a. breit und leicht verständlich. Eine Ausnahme machen allerdings die Ausführungen über Determinanten (S. 7—11). Diese bieten dem Leser (für den das Buch gedacht ist), enorme Schwierigkeiten. So heißt es z. B. auf Seite 9, Zeile 1—3: „Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn die Zeilen mit den Spalten vertauscht werden, da

$$\Sigma \pm a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \ldots a_{n\nu} = \Sigma \pm a_{\alpha 1}\, a_{\beta 2} \ldots a_{\nu n}\,.$$"

Dies kann der mit Determinantentheorie nicht vertraute Leser kaum einsehen. Wenn man ein Lehrbuch über analytische Geometrie schreibt, dann setzt man entweder die Determinantentheorie ausdrücklich als bekannt voraus oder erklärt sie ausführlich. Der Verf. bringt die Vektoren erst im 8. Kapitel (S. 203—208) und Matrizen gar nicht. Es werden also fast durchwegs elementare Methoden einschließlich der Determinanten herangezogen. Dies ist durchwegs möglich und keineswegs abzulehnen, erscheint mir aber doch zu weit getrieben. Es gibt Dinge, wie etwa der Abstand von zwei windschiefen Geraden, die ohne Vektoren allzu schwerfällig sind. Das Buch beginnt mit den grundlegenden Formeln der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raum und führt zu den Kurven und Flächen 2. Grades. Hier wird eine Fülle von schönen geometrischen Sätzen gebracht. Zuletzt wird der Koordinatenbegriff verallgemeinert und eine Einteilung der Geometrie nach dem Gruppenprinzip (Erlanger Programm) gegeben. Zahlreiche Übungsaufgaben dienen der Einübung und, um das Verständnis zu erleichtern. Der Satz ist sehr gut, die Figuren aber lassen vielfach zu wünschen übrig. Diese sollen nur von Herren ausgeführt werden, die sehr gut zeichnen können und grundlegende Kenntnisse aus der Darstellenden Geometrie besitzen. Letzteres ist notwendig, damit keine Fehler unterlaufen, wie in den Fig. 50, 53 und 55. Der Wert des Buches liegt in der ausführlichen Behandlung der elementaren Teile der analytischen Geometrie einschließlich der zahlreichen Übungsaufgaben. *N. Hofreiter*, Wien

Elementare Kegelschnittlehre. Von *W. Lietzmann.* Mit 94 Textabb. und 7 Tafeln, 171 S. Bonn: F. Dümmler. 1950.

In dem Buch werden die Kegelschnitte von verschiedensten Gesichtspunkten betrachtet (Planimetrie, Stereometrie, Analytische Geometrie, Affine Geometrie, Perspektive, Projektive Geometrie, Gruppentheorie). Die Darstellung ist elementar und sehr gut verständlich. Die Abbildungen und Tafeln sind i. a. sehr klar. In Tafel I links ist deutlich zu sehen, daß F_1 und F_2 nicht auf der Peripherie der Kugeln liegen. In den Abb. 33 und 34 tritt dies nicht deutlich hervor;

in Abb. 28 liegen F_1 und F_2 auf der Peripherie, was aber bei der hier gewählten Projektion nicht möglich ist. — Das Buch ist Lehrern und Schülern sehr zu empfehlen.

N. Hofreiter, Wien

Elementare Kugelgeometrie mit numerischen und konstruktiven Methoden. Von *W. Lietzmann*. Mit 157 Textabb., 292 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1949. DM 14.80.

Das Buch schließt sich würdig an die Reihe der älteren, aber guten Lehrbücher über die Kugel an (z. B. *Blaschke*, *Coolidge*, *Heger*, *Richter*, *Steiner*). Ich charakterisiere nun schlagwortartig den Hauptinhalt des Buches: 1. Teil: Stereometrische Grundbegriffe, Ecken, der Großkreis als geodätische Linie, einiges aus der sogenannten Sphärik, das isoperimetrische Problem, Geometrie mehrerer Kugeln, gitterförmige Packungen, gerichteter Kreis und gerichtete Kugeln. 2. Teil: Ausführliche Darstellung der sphärischen Trigonometrie. 3. Teil: Methoden der Darstellenden Geometrie, das Auf- und Grundrißverfahren, die stereographische, die gnomonische und die Lambert-Projektion. Was hier erarbeitet wurde, wird im folgenden auf die Kartenkunde angewendet. 4. Teil: Sphärische Astronomie. — Charakteristisch für das Buch ist die Tatsache, daß nicht bloß die rechnerischen Methoden verwendet werden, sondern auch die graphischen. Wenn ich auch der Stoffauswahl nicht ganz zustimme (so hätten meiner Meinung nach die in den letzten 20 Jahren erschienenen, einschlägigen und schwer zugänglichen, fremdsprachigen Abhandlungen, z. B. von *V. Thébault*, berücksichtigt werden können), so kann das Buch jedem Mittelschullehrer und jeder Schulbibliothek bestens empfohlen werden.

J. F. Lewandowski, Pfaffstätten b. Wien

Elemente der Analytischen Geometrie. Von *G. Bol.* (Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher: Band II und V.) 1. Teil: Mit 103 Textabb., 232 S. 1948. DM 16.50. — 2. Teil: Mit 23 Textabb., 156 S. 1949. DM 10.50. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Wenn auch in den letzten Jahren mehrere Bücher über analytische Geometrie erschienen sind, so wird das Buch seinen Platz finden. Es betont in erster Linie die geometrischen Überlegungen. Sie sind Ausgangspunkt aller Betrachtungen. Daran schließen sich exakte Überlegungen an. Der Vektorbegriff steht im Vordergrund, was den Vorteil hat, daß die Formeln elegant abgeleitet werden können. Die Darstellung ist überaus klar. Immer wird vom Speziellen ausgegangen und dabei werden die Überlegungen so geführt, daß der allgemeine Fall dann keine Schwierigkeit mehr macht. Band 1 enthält: Geraden, Ebenen, Kreise und Kugeln, Volumen, Kegelschnitte, algebraische Kurven und Flächen. Band 2 bringt: Determinanten und lineare Gleichungen, Transformationen, Bewegungen, Affinität, Abbildungen und Gruppen. Zahlreiche Aufgaben dienen der Einübung und zur Vertiefung des Stoffes. In einer Besprechung muß man auch die zahlreichen historischen Notizen lobend erwähnen. Das Buch ist ein ideales Lehrbuch für Studierende, die damit wirklich Geometrie lernen.

N. Hofreiter, Wien

Projektive Differentialgeometrie. Von *G. Bol.* 1. Teil. (Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher: Band IV.) Mit 15 Textabb. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht. 1950. DM 19.80.

Dieses etwas verspätete Geschenk zum 60. Geburtstag *W. Blaschkes* ist ganz im Geiste dieses Meisters geometrischer Forschung gehalten und bildet

eine höchst erfreuliche Neuerscheinung auf dem Felde der deutschsprachigen mathematischen Lehrbücher der Nachkriegszeit. Faßt es doch das umfangreiche Material über die projektive Kurventheorie (das Literaturverzeichnis, das nur die noch nicht in *Fubini-Cechs* Projektiver Flächentheorie von 1931 aufgezählten Arbeiten enthält, umfaßt volle 50 Seiten!) in einem handlichen Bande zusammen und ist dabei so klar und faßlich geschrieben, daß es jeder nur etwas vorgeschrittene Student lesen kann.

Im ersten Kapitel (Ebene Kurven) tritt die vom Verfasser angewandte Methode bereits klar in Erscheinung: die Schwierigkeiten, die darin begründet sind, daß sowohl über die Parameterwahl als auch über die Eichung der homogenen Koordinaten frei verfügt werden kann, werden auf dem Weg überwunden, daß zunächst nur eine Kopplung zwischen Parameterwahl und Eichung vorgenommen wird. Dadurch bleibt die Darstellung schmiegsam genug, um den Parameter jederzeit zweckmäßig wählen zu können, während durch die damit verknüpfte Eichung die Formeln eine einfache Gestalt annehmen. Zu jedem Parameter wird ein Begleitdreieck definiert, für dessen Auswahl die Rücksicht auf das Dualitätsprinzip bestimmend ist. Die sämtlichen, in einem Kurvenpunkt möglichen Begleitdreiecke hängen von einem Parameter ab. Wählt man die Begleitdreiecke aus dieser Mannigfaltigkeit willkürlich aus, so ist dadurch der Kurvenparameter bis auf eine ganze lineare Transformation festgelegt. Eine spezielle Wahl der Begleitdreiecke führt auf eine projektiv ausgezeichnete Wahl des Parameters, der im Fall der Kegelschnitte sich mit dem projektiven Parameter deckt und ebenso wie dieser bis auf eine linear gebrochene Transformation festliegt (Koinzidenzparameter). Eine andere Wahl des Parameters (Projektivbogenlänge) ist bis auf eine additive Konstante eindeutig und führt zur Berechnung der projektiven Differentialinvarianten. Damit ist die ebene Kurventheorie im Prinzip erledigt, die gewonnenen Mittel werden zur Lösung einiger Aufgaben (Variationsproblem der extremalen Projektivlänge, sextaktische Punkte, Schmiegkegelschnitt) verwendet.

In dem folgenden Abschnitt (Einführung in die räumliche Geometrie) werden die Hilfsmittel für die Behandlung der Raumkurven und Flächen bereitgestellt, soweit diese über den Rahmen einer elementaren Vorlesung über analytische Geometrie hinausgehen. Hier sind besonders die schöne Behandlung der Liniengeometrie, der Raumkurven 3. Ordnung und die sorgfältigen und klaren Erörterungen über die Berührung von Kurven und Flächen hervorzuheben. Auch einiges aus der Flächentheorie findet hier bereits Platz (Asyptotenlinien, Regelflächen, Quadriken von Darboux und Lie, Laplacetransformation, Strahlenkongruenzen).

Der dritte Abschnitt bringt die systematische Behandlung der Raumkurven. Die geometrische Deutung der Formeln, deren Herleitung analog wie in der Ebene geschieht, ist hier viel schwieriger und erfolgt unter Heranziehung gewisser mit der Kurve invariant verknüpfter Raumkurven 3. Ordnung, unter denen die sogenannte Harmonikal-C_3 die wichtigste ist. Sie erscheint in der Darstellung von *Eol* als Ort einer der Ecken des Begleittetraeders bei verschiedener Wahl des Parameters (die entsprechende Frage bei ebenen Kurven ergibt den Schmiegkegelschnitt). Analog zu den Koinzidenzparametern bei ebenen Kurven gibt es hier wieder eine Klasse projektiv ausgezeichneter Parameter (Torsalparameter), die untereinander durch linear gebrochene Transformationen zusammenhängen, sowie eine Projektivlänge. Der Ort aller Harmonikal-C_3 sowie die Einhüllende aller Schmiegebenen der Harmonikal-C_3 heißen Harmonikalflächen der Kurve. Dem Studium dieser Flächen, ferner ge-

wisser durch die Kurve definierter Strahlenkongruenzen sowie spezieller Kurvenklassen ist der Rest des Kapitels gewidmet.

Der 4. Abschnitt endlich bringt die projektive Theorie der Flächenstreifen und bereitet damit den Übergang zur Flächentheorie vor, die im zweiten Teil des Werkes behandelt werden soll. Neben den Streifen 1. Ordnung werden auch Streifen 2. Ordnung in Betracht gezogen. Hier läßt sich in besonders einfacher Weise eine Projektivlänge definieren. Streifen 2. Ordnung für die die erste Variation der Projektivlänge Null ist, werden als pangeodätisch bezeichnet. Dies knüpft an eine Begriffsbildung von *C. Segre* an, der das entsprechende Variationsproblem für Kurven auf einer Fläche betrachtet und die Extremalen als „Pangeodätische" bezeichnet hat. Jeden Streifen 1. Ordnung kann man zu einem pangeodätischen Streifen 2. Ordnung ergänzen.

Am Schluß des Buches sind noch eine Reihe von Tatsachen aus der Geometrie und Analysis zusammengestellt, die der Verfasser nicht ohne weiters als voraussetzen zu können glaubt. Das wird für viele Leser willkommen sein. Vor allem aber sei auf das reichlich im ganzen Buch eingestreute Aufgabenmaterial hingewiesen, das sehr vielseitig und anregend ausgewählt ist.

Nochmals sei das schöne Buch wärmstens empfohlen.

J. Radon, Wien

Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene. Von *W. Michael.* 93 S. Basel: Birkhäuser. 1950. sfr. 11.50.

Die Ortskurventheorie spielt in der Elektrotechnik (Wechselstromtechnik) eine wichtige Rolle und wurde in erster Linie für die Bedürfnisse des Praktikers entwickelt. Auch für den Mathematiker ist jedoch die Behandlung ebener Kurven, deren Ortsvektoren in Abhängigkeit eines reellen Parameters durch komplexe Zahlen (Gauß'sche Zahlenebene) erfaßt werden, von Interesse und Nutzen, findet doch dieses Vorgehen neuerdings auch in Lehrbücher über (analytische) Geometrie Eingang.

Der Verf. baut in seinem bestens ausgestatteten Buch in breiter Form die Ortskurvengeometrie auf und setzt nur geringe Kenntnisse der Infinitesimalrechnung und analytischen Geometrie voraus. Es werden behandelt: Gerade, Kreis, Kegelschnitte, bizirkulare Quartik und zirkulare Kubik, weiters allgemeine Sätze über rationale Ortskurven, Asymptoten, Krümmungskreise, Zirkularität, Beispiele für nicht zirkulare Kurven 3. und 4. Ordnung, Fußpunktskurven.

Obwohl vor allem der Techniker angesprochen werden soll, stehen die geometrischen Gesichtspunkte im Vordergrund und werden die technischen Anwendungen nur in zahlreichen, gut ausgeführten Beispielen gebracht. Neben der naturgemäß analytischen Behandlung wird auch die konstruktive Seite berücksichtigt. Dem Mathematiker wäre wohl an vielen Stellen eine größere Exaktheit im Ausdruck, wie in der Beweisführung wünschenswert. Trotzdem versteht man, was unter der Division durch Null (S. 29) oder unter dem reellen Nenner eines Differentialquotienten (S. 30) gemeint wird. Die Scheitelkonstruktion der Parabel (S. 38—39) ließe sich wohl vereinfachen und auf die freie Wahl der Einheitsstrecke verzichten. Auch die Behauptung auf S. 48, daß in der Polargleichung $r = f(\varphi)$ einer algebraischen Kurve φ nur als Argument einer trigonometrischen Funktion (sin, cos) vorkommen darf, erfordert einen Zusatz. Elegant erscheint die Bestimmung der singulären Punkte von bizirkularen Quartiken und zirkularen Kubiken im Kap. IV. Über den Abschluß der Ebene durch uneigentliche Elemente sollte größere Klarheit geschaffen werden — man merkt das Unbehagen des Autors in Kap. V, § 2!

Dieses hübsche Buch wird nicht nur dem Techniker eine wertvolle und klare Einführung in die Ortskurventheorie und ihre Anwendungen in der komplexen

Wechselstromtechnik geben, sondern ist ebensosehr dem Mathematiker zu empfehlen, der hierdurch die Schönheit und Eigenart dieses vorzüglichen Mittels der geometrischen Analyse kennen lernt. *H. R. Müller*, Graz

Die Ortskurventheorie der Wechselstromtechnik. Von *G. Oberdorfer*. Mit 64 Abb. und 9 Tafeln, VI, 100 S. Wien: F. Deuticke. 1950. S 60.—.

Die Ortskurventheorie gewinnt in der Elektrotechnik immer mehr an Bedeutung. Es wird daher von allen Interessenten begrüßt werden, daß es der Verfasser unternommen hat, die wichtigsten und vor allem auch für die Praxis brauchbaren Verfahren darzustellen. Es ist ihm gelungen, dies in überaus verständlicher Weise zu tun, was dem Buch sicherlich einen großen Leserkreis erschließen wird. Besonders sei auf die hübsche Darstellung der zirkularen Kubik und bizirkularen Quadrik hingewiesen. Zahlreiche Beispiele demonstrieren die praktische Verwendbarkeit der einzelnen Konstruktionen. (Versehen auf S. 42, Zeile 4, von unten: Der Quotient zweier Polynome zweiten Grades läßt sich nicht immer als Summe zweier linear gebrochener Funktionen schreiben.)

K. Prachar, Wien

Arithmetik und Geometrie. Von *F. Prowaznik* und *F. Klusacek*. 1. Teil (für die erste Klasse der Mittelschulen). Zweite Auflage. Mit 172 Textabb., 181 S. 1950. S 10.80. — 2. Teil (für die zweite Klasse der Mittelschulen). Mit 253 Textabb., 205 S. 1949. S 13.80. — 3. Teil (für die dritte Klasse der Mittelschulen). Mit 168 Textabb., 224 S. 1950. S 14.80. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Eine Arbeitsgemeinschaft von Lehrern der österreichischen Mittelschulen gibt ein Lehr- und Übungsbuch der Mathematik für die Mittelschulen heraus, von dem bisher die vorliegenden drei Bücher erschienen sind. Die Autoren (Prowaznik für Arithmetik, Klusacek für Geometrie) sind als Landesschulinspektoren in Wien tätig und verfügen über eine besondere pädagogische Erfahrung. Die Bücher sind ideale Lehrbücher für Schüler und Lehrer. Die Theorie wird der Fassungskraft der Schüler entsprechend dargestellt, die Aufgaben sind lebensvoll, was im Vergleich zu älteren Büchern besonders hervorgehoben werden muß. Reiches Bildmaterial verdient besonderes Lob. Es wäre zu wünschen, daß die Bücher in allen Mittelschulen Österreichs verwendet werden.

N. Hofreiter, Wien

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Der Jahresbericht der DMV mußte Ende 1943 mit dem 53. Band sein Erscheinen einstellen. Der 54. Band erscheint 1950 und zwar in zwei Heften von je 72 Seiten, von denen das erste bereits erschienen ist. Herausgeber sind Prof. H. Brandt (Halle) und Prof. E. Kamke (Tübingen). Der Jahresbericht soll der Verbindung der deutschen Mathematiker untereinander und mit den Mathematikern des Auslandes dienen. Die Anlage erfolgt wie bisher in zwei Teilen, und zwar sind im ersten Teil: Berichte und Abhandlungen aus dem Gesamtgebiet der Mathematik, im zweiten Teil: Aufgaben und Lösungen, Mitteilungen, Buchbesprechungen. Der Heftpreis für Mitglieder der DMV beträgt DM 8.50, für Nichtmitglieder DM 12.75. Druck und Ausstattung sind auch im neuen Verlag: Verlag für Wissenschaft und Fachbuch, Bielefeld, sehr gut.

N. Hofreiter, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkarbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

Soeben erschien:

Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit

Einführung in die neue Wahrscheinlichkeitslehre und ihre Anwendung

Von

Richard von Mises

Professor an der Harvard-Universität

Dritte, neubearbeitete Auflage

IX, 278 Seiten. 1951. S 78.—, DM 18.—, $ 4.30, sfr. 18.50

Seit seinem erstmaligen Erscheinen im Jahre 1928 ist das Buch in russischer, englischer und spanischer Übersetzung herausgekommen und liegt nunmehr, neu bearbeitet, in der dritten deutschen Auflage vor. Den Gegenstand des Buches bildet der quantitative Wahrscheinlichkeitsbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dieser Begriff wird unter betonter Distanzierung gegenüber allen metaphysischen Ansprüchen vom Standpunkt des exakten Naturwissenschaftlers und Mathematikers entwickelt. Die Neuauflage berücksichtigt einerseits die neuere Entwicklung und verzichtet andererseits auf verschiedene polemische Ausführungen der früheren Ausgaben, die heute überflüssig und überholt sind.

Soeben erschien:

Grundlagen der Atomphysik

Eine Einführung in das Studium der Wellenmechanik und Quantenstatistik

Von

Dr. phil. **Hans Adolf Bauer**

Professor an der Technischen Hochschule und der Universität in Wien

Vierte, umgearbeitete und bedeutend erweiterte Auflage

Mit 244 Textabbildungen. XX, 631 Seiten. 1951

In Leinen gebunden S 186.—, DM 45.—, $ 10.70, sfr. 46.—

Wissenschaftliche Strenge und Beschränkung auf das Wesentliche, verbunden mit einer so ausführlichen Darstellungsweise, daß auch der mit dem mathematischen Rüstzeug der modernen Physik weniger vertraute Leser instand gesetzt wird, in die schwierige Materie einzudringen: das sind die Vorzüge, die dem Werk bisher seinen hervorragenden Platz in der Fachliteratur verschafft haben. Die nunmehr erschienene vierte Auflage spiegelt in ihrem stattlichen Mehrumfang die gewaltige Entwicklung der Atomphysik in den letzten Jahren wider.